

Ein Skript der Vorlesung

Experimentalphysik 2
Elektrodynamik

(studentische Mitschrift der Vorlesung)

Prof. Winfried Petry
TU München
2. Semester, SS 2000

Datum: 01.03.2001

von Michael Wack, Christoph Moder, Manuel Staebel
(© 2000)
<http://www.skriptweb.de>

Hinweise (z.B. auf Fehler) bitte per eMail an uns: mail@skriptweb.de – Vielen Dank.

Inhaltsverzeichnis

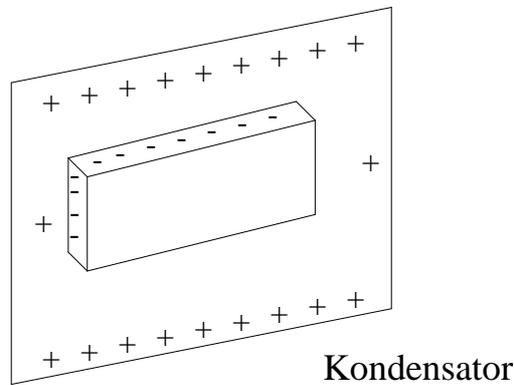
1.6 Anwendungen des Gaußschen Satzes und der Wirbelfreiheit.....	3
1.6.1 Plattenkondensator.....	3
1.6.2 Koaxkabel.....	4
1.6.3 Homogen geladene Kugel.....	5
1.6.4 Frei bewegliche Ladung (Leiter) im E-Feld.....	5
1.6.5 Faradayscher Käfig.....	6
1.6.7 Influenz.....	7
1.7 Energiedichte des elektrischen Feldes.....	8
1.8 Abschirmung des E-Feldes in leitenden Medien.....	9
Quantitativer Zusammenhang.....	11
C.2 Dielektrikum im elektrostatischen Feld.....	13
2.1 Dielektrizitätskonstante.....	13
2.2 Dielektrische Verschiebung D.....	15
2.3 Orientierungspolarisation.....	18
C.3 Elektrischer Strom.....	20
3.1 Klassifizierung von (elektrischen) Leitern.....	21
Supraleitung.....	21
3.2 Ionenleitung in Elektrolyten.....	22
3.3 Elektromotorische Kraft.....	22
3.4 Galvanisches Element, Batterie.....	22
3.5 Austrittsarbeit gegen Vakuum, Thermospannung.....	24
„Thermoelektrische“ Spannungsreihe.....	25
3.6 Kirchhoffsche Regeln.....	26
C.4 Das magnetische Feld.....	28
4.1 Quellenfreiheit des magnetischen Feldes, Zirkulation des magnetischen Feldes.....	30
Anwendung des Ampèreschen Gesetzes.....	31
Typische Magnetfelder.....	31
4.2 Biot-Savartsches Gesetz.....	31
4.3 Hall-Effekt.....	32
4.4 MHD-Generator (Magnetohydrodynamischer Generator).....	33
4.5 Generator + Motor.....	33
4.6 Zyklotronfrequenz.....	34
4.7 Das Faradaysche Induktionsgesetz.....	34
4.8 Zum Vorzeichen im Faradayschen Induktionsgesetz bzw. der Lenzschen Regel.....	35
4.9 Relativistischer Zusammenhang zwischen E- und B-Feld.....	36
4.10 Beispiele zum Induktionsgesetz.....	37
4.11 Selbstinduktion.....	38
4.12 Magnetische Feldenergie.....	39
4.13 Schwingkreis.....	40
Komplexer Wechselstromwiderstand.....	41
4.14 Erzwungener Schwingkreis.....	42
Leistungsabgabe am ohmschen Widerstand für Wechselstrom.....	43
C.5 Materie im Magnetfeld.....	44
Was verursacht auf mikroskopischer Ebene m?.....	44
Welche Kräfte wirken auf magn. bzw. elektr. Dipolmoment?.....	44
5.1 Paramagnetismus.....	45
5.3 Feldgleichungen (für Dia-, Para-, Ferromagnetismus).....	48

5.4 Diamagnetismus.....49
 C.6 Maxwell'sche Gleichungen, elektromagnetische Wellen.....51
 6.1 Maxwell'sche Gleichungen.....51
 6.2 Elektromagnetische Wellen im Vakuum.....51
 6.3 Intensität der elektromagnetischen Welle, der Poynting Vektor.....53
 6.4 Elektromagnetische Welle in Materie.....53
 6.5 Reflexion einer elektromagnetischen Welle.....53
 6.6 Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in Metallen, Skin-Effekt.....55
 6.7 Strahlung eines oszillierenden Dipols.....57

1.6 Anwendungen des Gaußschen Satzes und der Wirbelfreiheit

1.6.1 Plattenkondensator

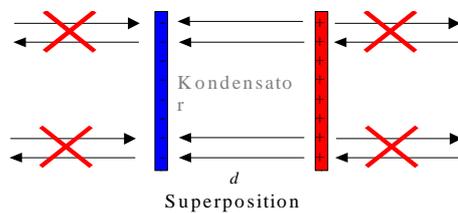
Zunächst: unendlich ausgedehnte Platte, positiv geladen



Gaußscher Satz:

$$A_{Deck} \cdot E_{Deck} + A_{Rück} \cdot E_{Rück} + 2 \cdot A_{Seite} \cdot E_{Seite} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{2 \epsilon_0} \frac{Q}{A} = \frac{1}{2 \epsilon_0} \sigma ;$$

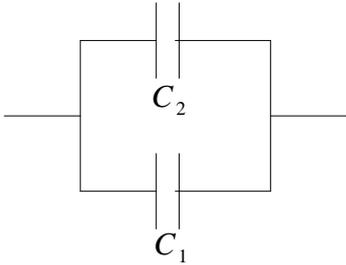
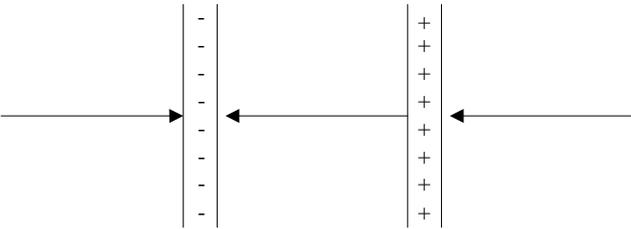
σ : Ladung pro Fläche



$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sigma ;$$

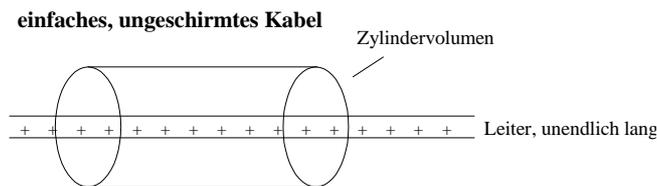
Spannung = Potenzialdifferenz = Arbeit, welche benötigt wird, die beiden Platten zu trennen.

$$U = E \cdot d = \sigma \text{ oer } \epsilon_0 d = \frac{d}{\epsilon_0 A} Q \Rightarrow \frac{Q}{U} = \frac{d}{\epsilon_0 A} \equiv C \text{ Kapazität [Farad]} = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = \left[\frac{\text{As}}{\text{Volt}} \right]$$

<p>Parallelschaltung</p>  <p>gleiche Spannung $Q = Q_1 + Q_2 = C_1 U + C_2 U = (C_1 + C_2) U$ $\Rightarrow C = C_1 + C_2$</p>	<p>Serienschaltung</p>  <p>gleiche Ladung $U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \Rightarrow$ $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$</p>
---	---

1.6.2 Koaxkabel

Einfaches Kabel, ungeschirmt:



Gaußscher Satz:

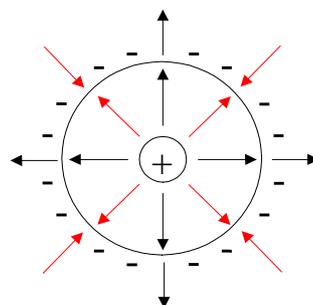
$$\oint_{\text{Zylinderboden}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \oint_{\text{Zylindermantel}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{l \cdot \lambda}{\epsilon_0};$$

$d\vec{A}$: Vektor in Richtung \vec{n} (Flächennormale); λ : Ladung pro Länge

$$E \cdot 2 \pi r l = \frac{l \cdot \lambda}{\epsilon_0}; \quad E = \frac{l}{2 \pi \epsilon_0 r}$$

abgeschirmtes Kabel:

geschirmtes Kabel

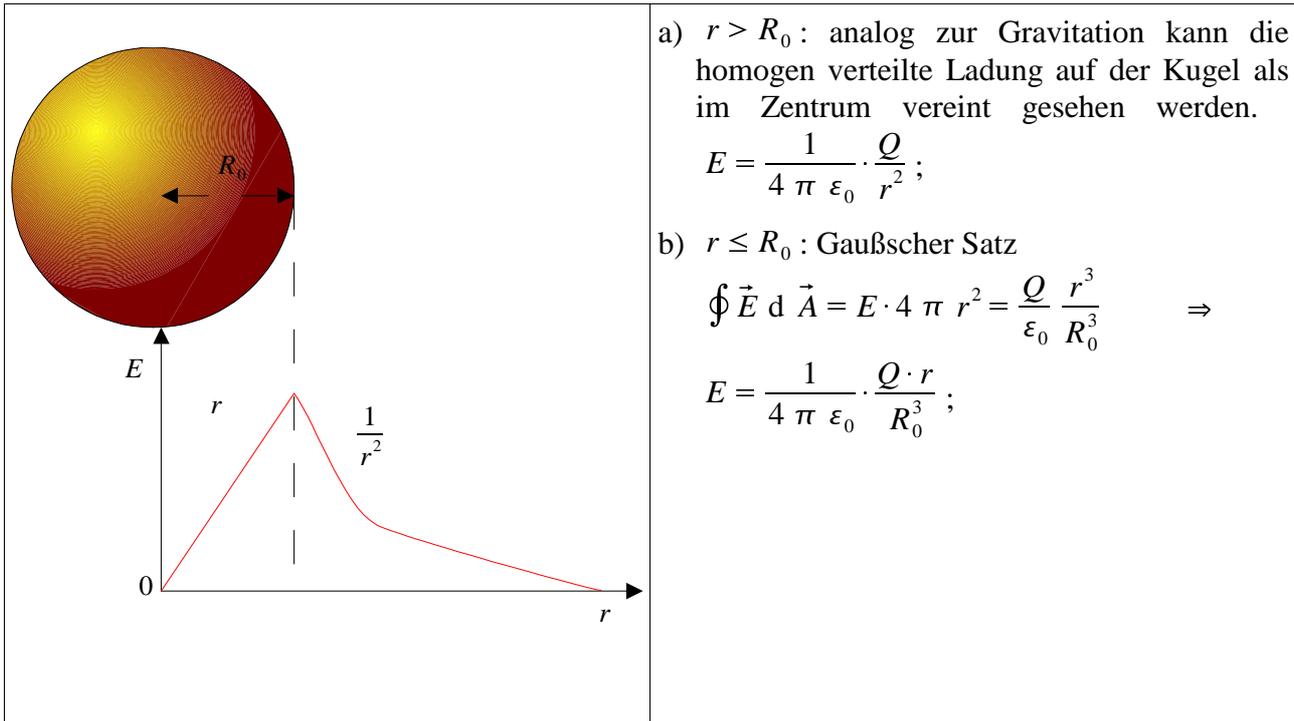


Superposition des \vec{E} -Feldes \Rightarrow kein Feld außen; innen doppeltes Feld

$$U = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \, d\vec{r} = \frac{\lambda}{\pi \varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \, dr = \frac{1}{\pi \varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1};$$

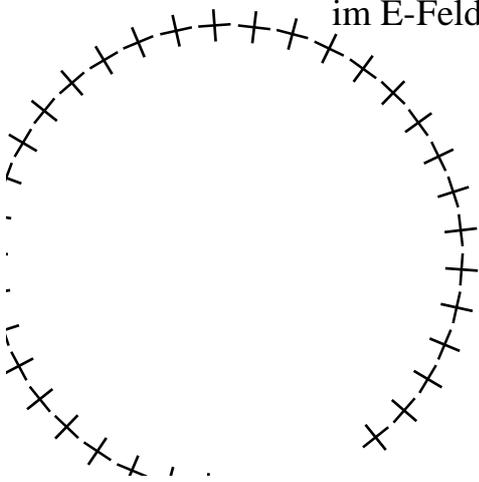
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\lambda \cdot l}{\frac{\lambda}{\pi \varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{\pi \varepsilon_0 l}{\ln \frac{r_2}{r_1}};$$

1.6.3 Homogen geladene Kugel



1.6.4 Frei bewegliche Ladung (Leiter) im E-Feld

Metallischer Leiter

<p style="text-align: center;">metallischer Leiter im E-Feld</p> 	<ul style="list-style-type: none"> - freie Beweglichkeit der Ladungsträger - Einstellung des Kräftegleichgewichts = Kräftefreiheit bei Anlegen des E-Feldes - ⇒ E-Feld im Inneren = 0 - wegen Gaußschem Satz muss eingeschlossene Ladung = 0 sein! - alle Ladungsträger auf äußerer Oberfläche - Leiteroberfläche = Äquipotenzialfläche ⇒ $E_{\parallel \text{Oberfläche}} = 0$, - $E = E_{\perp \text{Oberfläche}} = \frac{Q/A}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$;
--	---

Für Kugel:

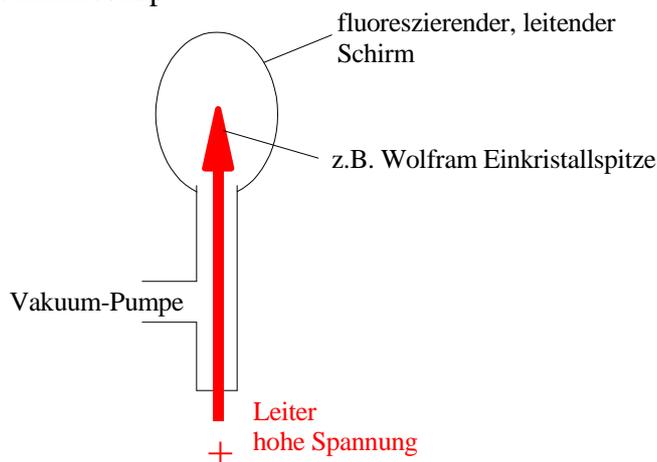
$$E = E_{\perp} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{4 \pi R_0^2} = \frac{\varphi_0}{R_0};$$

φ_0 : Potenzial

Verallgemeinerung: E_{\perp} auf Äquipotenzialfläche $\propto \varphi / R$
(ohne Beweis, für jede Oberfläche)

Die elektrostatische Feldstärke ist umgekehrt proportional zum Krümmungsradius.

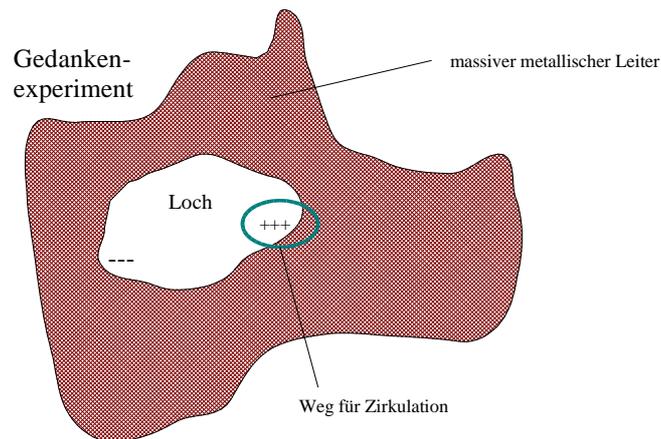
Beispiel hierzu: Feldionenmikroskop



Erstes Mikroskop mit atomarer Auflösung!

1.6.5 Faradayscher Käfig

E-Feld verschwindet in jedem (metallischen) Leiter, sofern er keine Ladung enthält.

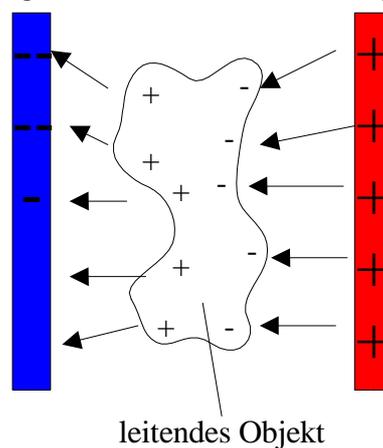


- Bisher bekannt wegen Gaußschem Satz. Gesamtladung auf Hohlrauminnenfläche = 0
- Kann z.B. durch Verteilung positiver und negativer Ladung realisiert werden
- wegen Wirbelfreiheit $\oint \vec{E} \, d\vec{s} = \int \text{rot } \vec{E} \, d\vec{A} = 0$
- da auf eingezeichnetem Weg kein Betrag zur Zirkulation erlaubt
 - ⇒ gedachte Ladungstrennung nicht möglich
 - ⇒ Hohlraum auch E-Feld frei ⇒ Faradaykäfig

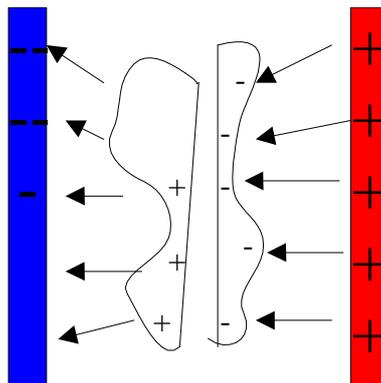
1.6.7 Influenz

Plattenkondensator

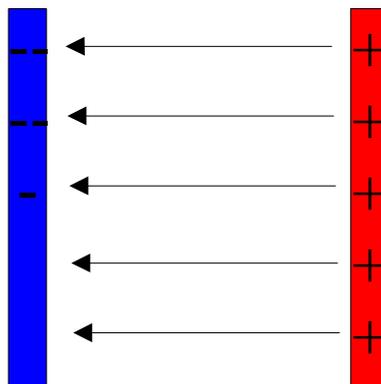
- Im Metall findet Ladungstrennung statt zum Aufbau des kompensierenden E_i :



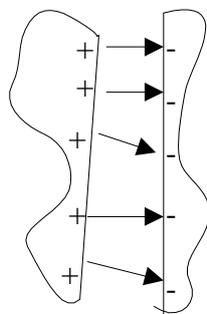
- durchschneide Metall und räumliche Trennung



– nehme Metall aus Plattenkondensator



– Influenzladung

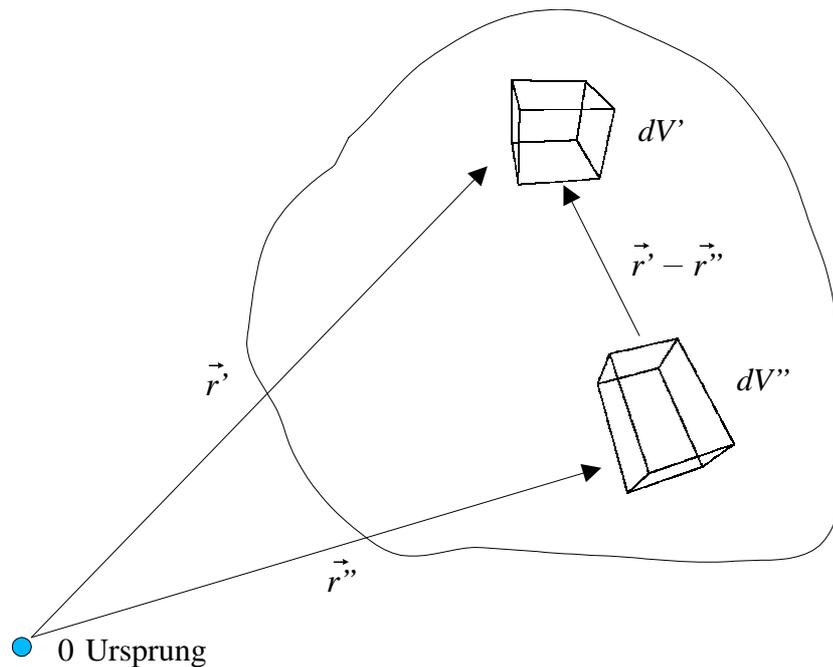


Influenzladung

1.7 Energiedichte des elektrischen Feldes

$$W_{el} = U_{pot} = \int_{\infty}^{r_0} \vec{F} \, d\vec{s} = \frac{\int \int \varrho(\vec{r}') \cdot \varrho(\vec{r}'')}{4 \pi \epsilon_0 (\vec{r}' - \vec{r}'')} \, dV' \, dV'';$$

im Prinzip bekannt, hier für allgemeinen Fall der Ladungsverteilung



Frage: Gibt es allgemeinen Zusammenhang zwischen Energiedichte und Feldstärke?
Speziell: Plattenkondensator

$$\int d W_{el} = \int U d q = \int_0^Q \frac{q}{C} d q = \frac{1}{2} C Q^2 = \frac{1}{2} \frac{E^2 \varepsilon_0^2 A^2 d}{\varepsilon_0 A} = \frac{1}{2} E^2 \varepsilon_0 V = \frac{1}{2} C U^2 ;$$

bekannt: $Q = E \cdot A$,

$$C = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d} ,$$

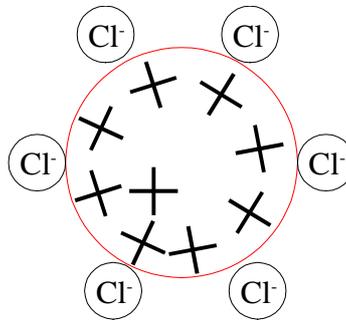
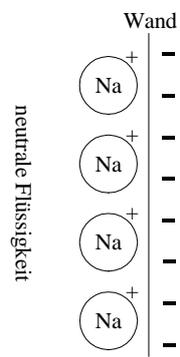
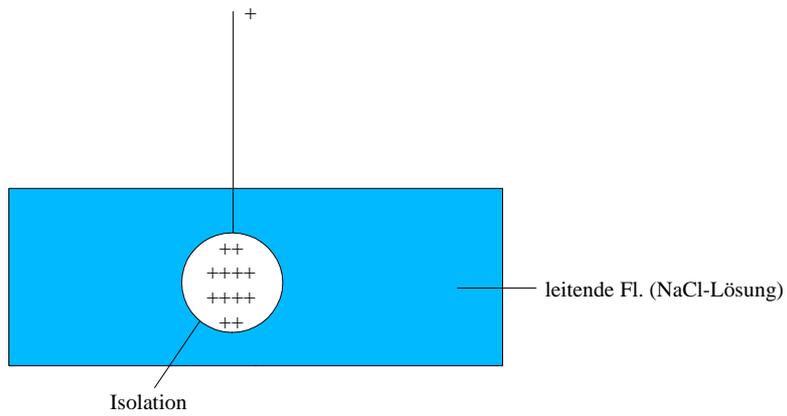
$$\frac{Q}{U} = C .$$

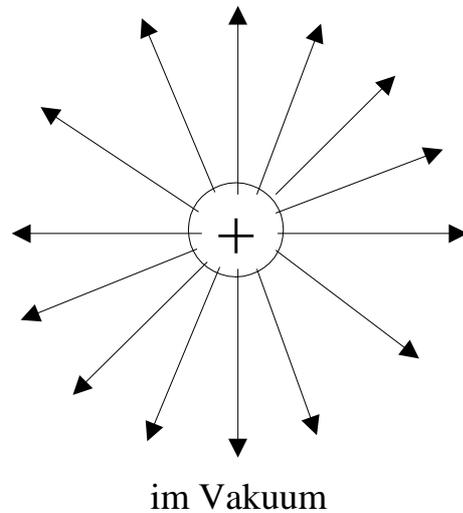
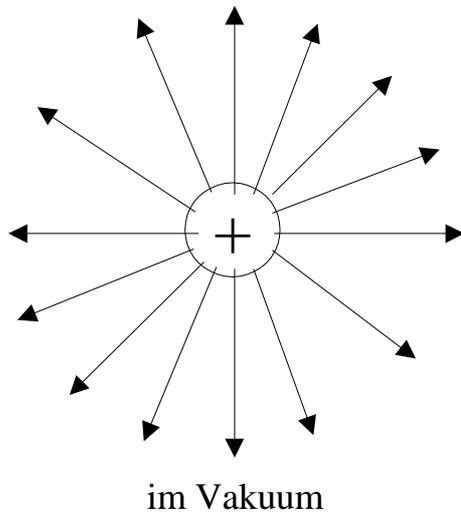
Ohne Beweis: gilt allgemein für Energiedichte eines beliebigen E-Feldes

$$\frac{W_{el}}{V} = \frac{1}{2} E^2 \varepsilon_0$$

1.8 Abschirmung des E-Feldes in leitenden Medien

- bisher nur \vec{E} -Feld (bzw. Potenzial $\varphi(\vec{r})$) im Vakuum behandelt
- für viele Anwendungen (\rightarrow Biophysik) ist dieser Ansatz zu eng
- Wie sehen die Feldverteilungen im Medium aus?
Gedankenexperiment:





Quantitativer Zusammenhang

Näherung: Kugel groß, Krümmung zu vernachlässigen

Weit weg von der Kugel:

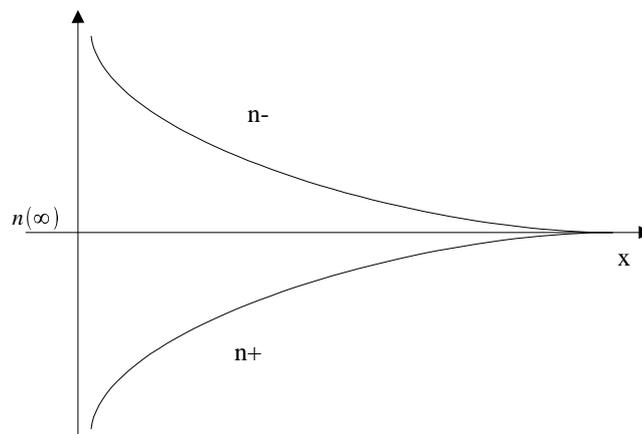
$$n^+(x) = n^-(x) = n(\infty)$$

Annäherung positiver Ionen an die Kugel hängt ab vom Verhältnis $U_{pot} = q \cdot \varphi(x)$ zur thermischen Energie $k_B T$:

$$n^+(x) = n(\infty) \cdot e^{-\frac{U_+}{k_B T}} = n(\infty) \cdot e^{-\frac{q \cdot \varphi(x)}{k_B T}};$$

$$n^-(x) = n(\infty) \cdot e^{+\frac{U_+}{k_B T}} = n(\infty) \cdot e^{+\frac{q \cdot \varphi(x)}{k_B T}};$$

(wie barometrische Höhenformel: Boltzmannverteilung)



für $k_B T \gg q \cdot \varphi(x)$ („hohe“ Temperatur, Zimmertemperatur ist bereits relativ hoch)

e-Funktion entwickeln:

$$\exp\left(\pm \frac{q \cdot \varphi}{k_B T}\right) \approx 1 \pm \frac{q \cdot \varphi}{k_B T};$$

$$\Rightarrow \varrho(x) = q \cdot (n^+(x) - n^-(x)) = q \cdot \left[n(\infty) \left(1 - \frac{q \cdot \varphi(x)}{k_B T} \right) - n(\infty) \left(1 + \frac{q \cdot \varphi(x)}{k_B T} \right) \right];$$

$$\varrho(x) = -n(\infty) \frac{2 q^2 \varphi(x)}{k_B T};$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \text{ und } \text{div } \vec{E} = \varrho / \epsilon_0$$

Eindimensionales Problem:

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dx} \text{ und } \frac{dE}{dx} = \frac{\varrho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -\frac{\varrho(x)}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = \frac{2 q^2 \cdot n(\infty)}{\epsilon_0 k_B T} \cdot \varphi(x);$$

Ansatz:

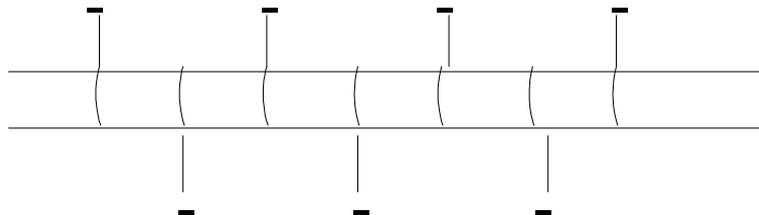
$$\varphi(x) = \varphi(0) \cdot e^{-\frac{x}{D}};$$

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = \frac{1}{D^2} \cdot \varphi(0) \cdot e^{-\frac{x}{D}} = \frac{2 q^2 \cdot n(\infty)}{\epsilon_0 k_B T} \cdot \varphi(0) \cdot e^{-\frac{x}{D}}; \Rightarrow$$

Debyesche Abschirmlänge:

$$D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \cdot k_B \cdot T}{2 q^2 \cdot n(\infty)}}$$

Beispiele: DNS

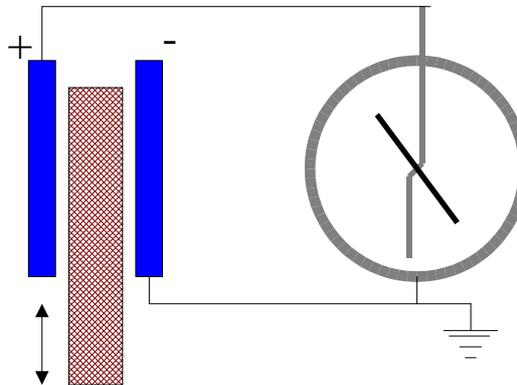


Ohne Beweis: Potenzialverlauf $\propto 1/r$ (Vakuum) $\Rightarrow 1/r e^{-r/D}$ (Medium)

Beispiel: Fremdatome im Metall

C.2 Dielektrikum im elektrostatischen Feld

2.1 Dielektrizitätskonstante



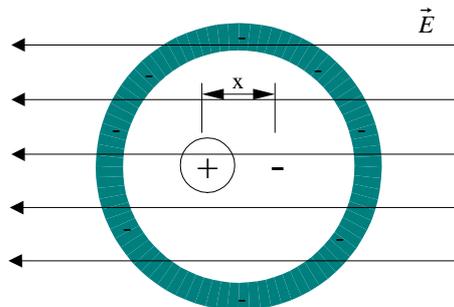
Ladung auf Kondensator unverändert: $C = Q/U$; $\Rightarrow C$ ist größer geworden.

Dielektrizitätszahl:

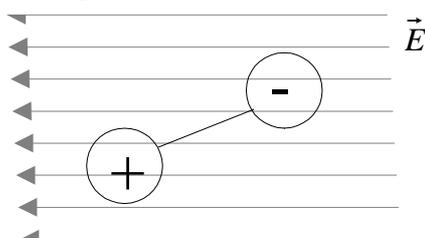
$$\epsilon = \frac{C_H}{C_V}$$

(ϵ_r relative Dielektrizitätskonstante)

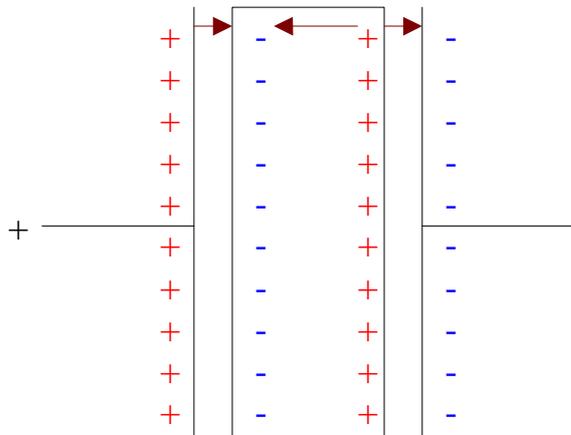
Atomistische Erklärung:



induziertes Dipolmoment



Ausrichtung permanenter Dipole



Oberflächenladung sättigt einen Teil der Feldlinien ab und schwächt so das äußere Feld.

Polarisation (Beschreibung durch ...)

$$\vec{p} = q \cdot \vec{\delta} = \alpha \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}; \quad \alpha : \text{Polarisierbarkeit}$$

n polarisierte Atome pro Volumeneinheit

\Rightarrow an den Oberflächen entsteht Flächenladungsdichte σ_p :

$$\sigma_p = n \cdot q \cdot \frac{A \cot \delta}{A} = n \cdot q \cdot \delta = n p; \quad A: \text{Kondensatorfläche}$$

Definition: Polarisation (einer Probe, eines Dielektrikums) = Dipolmoment der Probe pro Volumeneinheit.

Kondensatorinhalt: Ladung mal Abstand:

$$(\sigma_p \cdot A) \cdot L \Rightarrow |\vec{P}| = \sigma_p; \quad \vec{P} = n \cdot \vec{p} \quad \text{Vektor in Feldrichtung}$$

$$\Rightarrow P = n \cdot \alpha \cdot \epsilon_0 \cdot E; \quad \chi = \text{dielektrische Suszeptibilität}$$

Ohne Beweis: Für dicke Medien:

Clausius-Mosotti:

$$X = \frac{n \cdot \alpha}{1 - \frac{n \cdot \alpha}{3}}$$

Ohne Dielektrikum: $\epsilon_0 = \sigma_v / \epsilon_0$; σ_v : Ladungsdichte auf den Platten

Mit Dielektrikum:

$$E = \frac{\sigma_v - \sigma_p}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0};$$

$$\sigma_p = |\vec{P}| = \chi \epsilon_0 E \Rightarrow E = E_0 - \chi \cdot E;$$

$$E (1 - \chi) = E_0;$$

$$\frac{E_0}{E} = 1 + \chi ;$$

Wegen $E = U/d$ (Kondensator!) ist

$$\frac{E_0}{E} = \frac{U_0}{U} = \frac{Q/C_V}{Q/C_M} = \frac{C_M}{C_V} = \varepsilon .$$

$$\frac{C_M}{C_V} = \varepsilon = 1 + \chi ;$$

2.2 Dielektrische Verschiebung D

Wir definieren einen Vektor \vec{D} in Richtung von \vec{E} , dessen Betrag gleich der Flächendichte der erzeugenden Ladung ist:

$$\sigma = |\vec{D}|, \quad \vec{D} \parallel \vec{E} \quad \text{dielektrische Verschiebungsdichte}$$

$$[D] = \left[\frac{C}{m^2} \right] = \left[\frac{As}{m^2} \right] ;$$

Zusammenhang \vec{D} , ε , \vec{E} :

$$Q_V = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \cdot U ; \Rightarrow \frac{Q_V}{A} = \varepsilon_0 \frac{U}{D} \Rightarrow \sigma_V = \varepsilon_0 E ;$$

$$\vec{D}_V = \varepsilon_0 \vec{E}$$

Mit Dielektrikum vergrößert sich – bei gleicher angelegter Spannung U – die Flächendichte der Ladung an den Kondensatorplatten wegen $C_M = \varepsilon \cdot C_V$ um den Faktor ε .

$$D_M = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$$

Beim Übergang vom Vakuum ins Dielektrikum hat man $\varepsilon_0 \vec{E}$ durch $\varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$ zu ersetzen.

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E} = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \vec{E} = \vec{D} - D_V ;$$

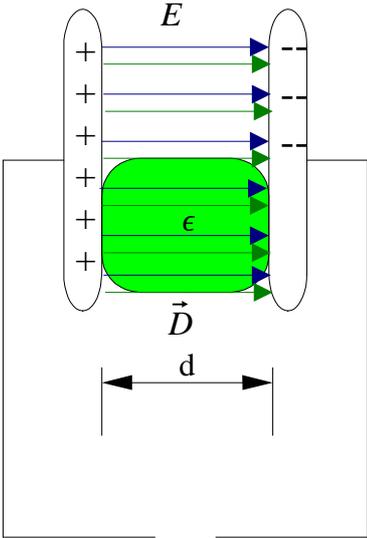
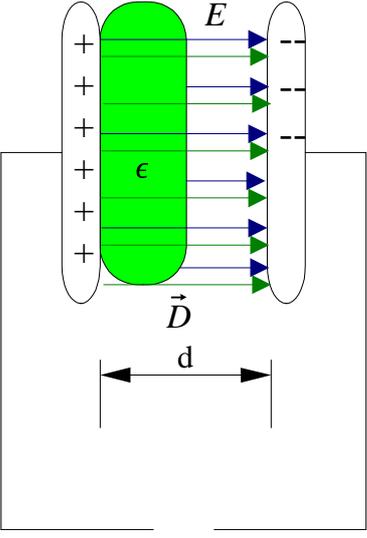
$$\vec{D} = \vec{D}_V + P ;$$

Grund zur Einführung von \vec{D} : einfache Formulierung von Feldgleichung

$$\oint_F \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \varrho \, dV \Rightarrow \oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int \varrho \, dV \Rightarrow$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho ;$$

Folgerungen:

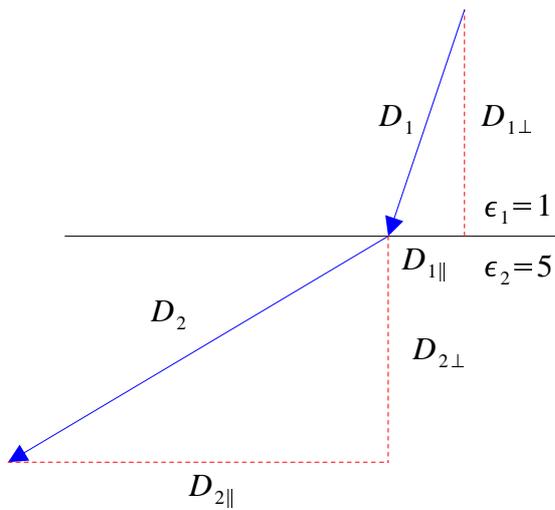
 <p style="text-align: center;">$U = \text{const}$</p>	 <p style="text-align: center;">$U = \text{const}$</p>
$E = \frac{U}{d} \Rightarrow E_V = E_M ;$ $D_M = \frac{Q_M}{A} ; D_V = \frac{Q_V}{A} ; D_M = \epsilon D_V ;$	$D = \frac{Q}{A} \Rightarrow D_M = D_V ;$ $D_V = \epsilon_0 E_V = D_M = \epsilon \epsilon_0 E_M ;$ $\Rightarrow E_M = \frac{1}{\epsilon} E_V ;$

Für die Erzeugung der \vec{D} -Linien sind die wahren Ladungen des Kondensators verantwortlich; für die Erzeugung der \vec{E} -Linien sind die nicht kompensierten freien Ladungen des Kondensators verantwortlich.

Die Tangentialkomponente des E-Feldes verläuft an der Grenzfläche Vakuum/Dielektrikum stetig, während die des D-Feldes einen Sprung aufweist.

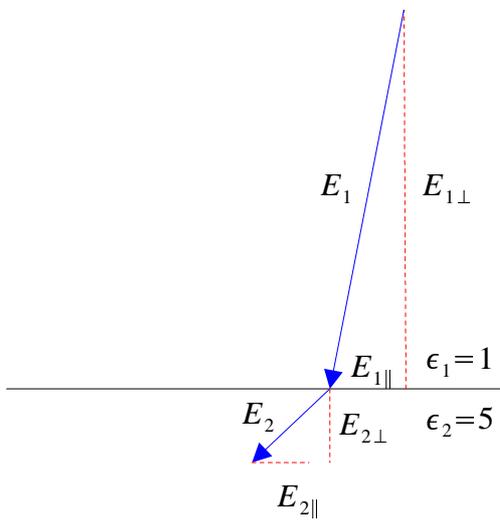
Die Normalkomponente des D-Feldes verläuft an der Grenzfläche Vakuum/Dielektrikum stetig, während die des E-Feldes einen Sprung aufweist.

Z.B. Grenze zwischen zwei Dielektrika:



D_{\perp} ist stetig
 $D_{2\perp} = D_{1\perp}$

D_{\parallel} unstetig
 $D_{2\parallel} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cdot D_{1\parallel}$



E_{\perp} ist unstetig
 $E_{2\perp} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_{1\perp}$

E_{\parallel} stetig
 $E_{2\parallel} = E_{1\parallel}$

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

Wichtig: $\vec{D}_{1,2}$ bleibt \parallel zu $\vec{E}_{1,2}$

Energiedichte im Kondensator:

$$\int d W_{el} = \int U d q = \int E d d q = \int E d A d D =$$

$$= \int E V d D = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} E D V;$$

$$d D = \frac{d q}{A}; \quad d D = \epsilon \epsilon_0 d E; \quad \Rightarrow$$

$$\frac{W}{V} = \frac{1}{2} E D ;$$

2.3 Orientierungspolarisation

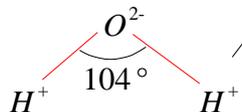
Beitrag zweier Prozesse im Dielektrikum:

a) **Verschiebungspolarisation**, Wärmebewegung kaum/kein Einfluss, da elektronische Verschiebung instantan (10^{-15} sec) im Vergleich zur Wärmebewegung (10^{-12} sec):

$\Rightarrow \alpha_{\text{verschieb}} \sim T$ -unabhängig;

$P_{\text{Verschiebung}} \sim 10^{-33}$ C m (typisch!)

b) **Orientierungspolarisation**: Beispiel H_2O

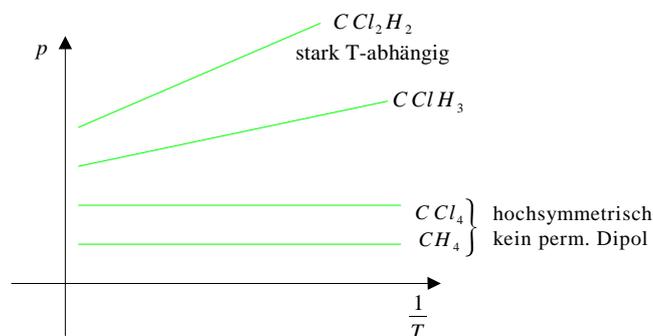


permanentes Dipolmoment auf Grund der Ladungsverteilung im Molekül

$\Rightarrow P_{\text{Orientierung}} = 1,1 \cdot 10^{-10}$ m $1,6 \cdot 10^{-19}$ C $\sim 10^{-29}$ C m

$\Rightarrow P_{\text{Orientierung}} \gg P_{\text{Verschiebung}}$; Brownsche Molekularbewegung stört Ausrichtung der permanenten Dipolmomente im äußeren \vec{E} -Feld.;

$\Rightarrow \alpha_{\text{orient}}$ stark T-abhängig



Achtung CO_2 : $\text{O}^{--} - \text{C}^{++++} - \text{O}^{--}$ kein permanentes Dipolmoment

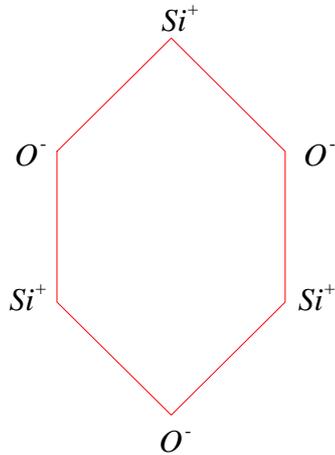
Anwendung:

Pyroelektrizität: Viele Mineralien zeigen bei Temperaturänderung an ihren entgegengesetzten Enden Ladung. Ursache:

- Orientierungspolarisation auf molekularer Ebene; bei Normaltemperatur bereits Orientierungspolarisation vorhanden: Kompensation durch Anlagerung freier Ladungsträger in „feuchter“ Luft.
- T-Absenkung \Rightarrow Orientierungspolarisation wächst in trockener Atmosphäre, Unterschuss an kompensierender Ladung $\Rightarrow E$ äußeres \vec{E} -Feld
- T-Erhöhung in trockener Atmosphäre \Rightarrow umgekehrter Prozess \Rightarrow Überschuss an

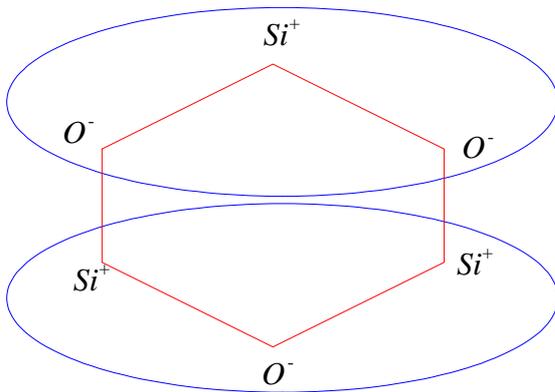
kompensierender Ladung \Rightarrow E-Feld umgekehrt gepolt

Piezelektrizität: Beispiel Quarzkristall SiO_2 , ebenfalls polar

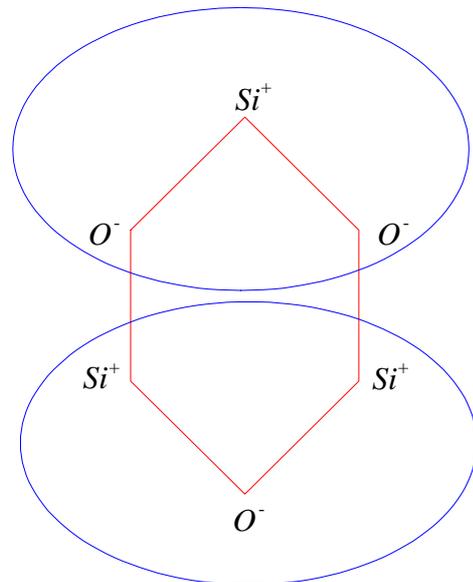


- Projektion in Ebene \perp zur optischen Achse
- Helix-förmige Anordnung der Atome
- elektrische Neutralität im ungestörten Fall

Druck \perp zur optischen Achse:



longitudinaler Piezoeffekt



transversaler Piezoeffekt

- Anlegung von Druck erzeugt Spannung
- Anlegung einer Spannung verursacht mechanische Umformung
 - \Rightarrow Anlegung einer Wechselspannung, Schwingung in Resonanz, Ultraschallgeber, Eichmaß für Frequenzen
 - \Rightarrow Anlegung einer Gleichspannung: mechanisches Stellglied z.B. in Kraftmikroskop
 - \Rightarrow Messung einer Spannung: Druckmessung

C.3 Elektrischer Strom

Stromdichte j = Zahl der Ladungen / sec \perp durch Einheitsfläche

$$\vec{j} = n \cdot q \cdot \vec{v} \rightarrow n q \langle \vec{v} \rangle;$$

Mittlere Geschwindigkeit; Achtung: $\langle v \rangle = 0$ im Gleichgewicht.

Driftgeschwindigkeit: Strom aus geschlossener Fläche muss Ladungsänderung in umschlossener Fläche entsprechen.

$$\oint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \rho \, dV;$$

$$\text{Ohmsches Gesetz: } U = R \cdot I;$$

$$1 \text{ Ohm} = 1 \frac{V}{A} = \frac{1}{\text{Siemens}};$$

$$R = \rho_0 \cdot \frac{l}{A};$$

ρ_0 spezifischer Widerstand [$\Omega \text{ cm}$]; Achtung: \neq Ladungsdichte ρ !

$1/r \rho_0 = \sigma_0 =$ spezifische Leitfähigkeit

$$I = \frac{U}{R}; R = \rho_0 \frac{l}{A}; \frac{1}{\rho_0} = \sigma_0; \frac{I}{A} = \sigma_0 \frac{U}{l};$$

$$\vec{j} = \sigma_0 \vec{E} \Rightarrow \langle \vec{v} \rangle \propto \vec{E};$$

Mikroskopisches Modell für Ohmsches Gesetz:

- zunächst Elektronen als Ladungsträger
- thermische Bewegung von e^- in Leiter ohne \vec{E} -Feld, $\langle v \rangle = 0$ (Achtung $\langle v^2 \rangle \neq 0$!)
- Anlegen des \vec{E} -Feldes:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \cdot E \xrightarrow{\text{Integration}} \vec{v} = \frac{q \cdot \vec{E}}{m} t + \vec{v}_0;$$

- Interpretation der Zeit t als Beschleunigungszeit zwischen zwei Stößen an Ionenrümpfen:

$$t \rightarrow \tau$$

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{q \cdot \vec{E}}{m} \cdot \tau \quad \text{mittlere Driftgeschwindigkeit}$$

$$\frac{\langle \vec{v} \rangle}{\vec{E}} = \frac{q \cdot \tau}{m} = \mu \quad \text{Beweglichkeit}$$

- Verallgemeinerung auf ionische und elektronische Leiter:

$$\sigma_0 = \frac{n \cdot q \cdot \langle \vec{v} \rangle}{E} = e \left(n^+ \mu^+ - n^- \mu^- \right) = e^2 \left(n^+ \frac{\tau^+}{m^+} + n^- \frac{\tau^-}{m^-} \right);$$

Elektrische Leistung:

- geleistete Arbeit beim Durchlaufen einer Potenzialdifferenz

$$W_{el} = U \cdot q \text{ mit}$$

$$I = \frac{d q}{d t} \Rightarrow \frac{d W}{d t} = U \cdot I \equiv P = I^2 R = \frac{U^2}{R};$$

Diese Leistung wird im Widerstand des Verbrauchers verzehrt.

3.1 Klassifizierung von (elektrischen) Leitern

- Isolatoren
- Halbleiter
- Leiter
- Supraleiter

Metalle: nur ein e^- an Leitung beteiligt pro Atom

$$n_e = \frac{N_A \cdot \rho}{M} \left[\frac{1}{\text{cm}^3 \text{ g}} \right] = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \cdot 0,97}{23} = 2,5 \cdot 10^{22} \frac{e}{\text{cm}^3};$$

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{\sigma_e m}{n e^2} = 3 \cdot 10^{-14} \text{ s} \\ \langle \vec{v}_e \rangle &\approx 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned} \right\} \text{ mittlere freie Weglänge } \approx 300 \text{ \AA}$$

	Konstantan: 25 % Nickel, 75 % Kupfer
--	--------------------------------------

Supraleitung

Kamerlingh-Onnes (1911)

Einige elementare Metalle und Legierungen zeigen völlig widerstandsfreie Stromleitung unterhalb einer Sprungtemperatur T_C .

<i>Element</i>	Nb	Pb	V	Ta	Hg(α)	Sn	Al
<i>T_C [K]</i>	9,46	7,2	5,3	4,48	4,15	3,72	1,18

Intermetallische Legierungen der Struktur A_3B haben höhere T_C :

<i>Legierung</i>	Nb_3Ge	Nb_3Sn	V_3Ga	V_3Si
<i>T_C [K]</i>	23,2	18,05	16,5	17,1

Supraleitung in Oxiden:

Material	T_C [K]
LOCO = $\text{La}_{1,85}\text{Ba}_{0,15}\text{CuO}_4$	36
YBCO = $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$	95
BSCCO = $\text{Bi}_2\text{Sn}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$	110
TBCCO = $\text{Tl}_2\text{Ca}_2\text{Ba}_2\text{Cu}_3\text{O}_x$	120
HBCCO = $\text{Hg}_2\text{Ba}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_8$	130

Supraleitung in Fullerenen: C_{60}A_3 (A: Alkalimetall); höchstes T_C für $\text{C}_{60}\text{Rb}_2\text{Cs}$ = ca. 31 K

Organische Supraleiter:

$(\text{BEDT-TTF})_2\text{Cu}(\text{CNS})_2$ $T_C = 10,4$ K

3.2 Ionenleitung in Elektrolyten

Leitfähigkeit durch Beweglichkeit positiver **und** negativer Ladungsträger $\langle \vec{v}_D \rangle \approx 0,5 \text{ mm s}^{-1}$.
Ladungstransport über Massetransport, Dissoziation der Moleküle $\text{NaCl} \rightarrow \text{Na}^+ \text{Cl}^-$.

Absenkung der Dissoziationsenergie auf thermische Energie der Ionen

Abschirmung der Coulombwechselwirkung

Kationen = positive Teilchen, wandern zur Kathode

Anionen = negative Teilchen, wandern zur Anode

3.3 Elektromotorische Kraft

	<ul style="list-style-type: none"> – offener Schalter, Heizung ein $\Rightarrow e^-$ dampfen von Kathode ab \Rightarrow schlagen sich an Anode nieder bis $e U_A \sim k_B T$ \Rightarrow Gleichgewicht von thermischer Emissionsenergie und aufgebautem Potenzial (Thermospannung) – Schalter schließen $\Rightarrow I$ über hochohmigen Verbraucher $I = U/R$, kontinuierlich \Rightarrow aus thermischer Energie wird elektrische Energie \Rightarrow elektromotorische Kraft
--	--

Nutzung z.B. in Raumfahrt: Parabolspiegel 1 m^2 liefert ca. 100 W kontinuierlich; typische Effizienz: 20 %

3.4 Galvanisches Element, Batterie

– Eintauchen von Metallelektroden in Elektrolyten \Rightarrow Lösung von Metallionen in polare Flüssigkeit ergibt energetische Absenkung. Es gehen keine Elektronen in Lösung. Dessen Austrittsarbeit zu hoch.

⇒ Metall lädt sich negativ auf bis Potenzial die Lösungsenergie kompensiert

Diese Skala ist normiert auf Pt-Elektrode, umgeben von H^+ .

$Cu^{++} + 0,34$ und $Zn^{++} - 0,76$ ergibt 1,1 Volt

Primärelemente: erzeugen aus chemischer Reaktion zweier Stoffe elektrische Energie

Sekundärelemente: speichern elektrische Energie „reversibel“ mit Hilfe einer chemischen Reaktion

Beispiele für Primärelemente:

- „Nasselemente“
- „Trockenelemente“: für Taschenlampen, Uhren, tragbare Geräte
Braunstein-Zink-Element (1,5 V): Elektrolyt: Ammoniumchlorid ($NH_4Cl + H_2O$); es entsteht H_2O

Allgemeine Charakterisierung: $+C/MnO_2/NH_4Cl, H_2O/Zn-$

Quecksilberoxid-Zink

Silberoxid-Zink

Lithium-Zink

Beispiele für Sekundärelemente:

– **Bleiakku:**

Kathode: $PbSO_4 + 2 e^- \rightarrow Pb + SO_4^-$

Anode: $PbSO_4 + 2 H_2O \rightarrow PbO_2 + SO_4^- + 4 H^+ + 2 e^-$

Summenregel: $2 PbSO_4 + 2 H_2O$ Laden/Entladen Pb (Kathode) + PbO_2 (Anode) + $2 H_2SO_4$

– **NiCd (NC-Akku):** alkalisch (KOH-Elektrolyt):

$Cd(OH)_2 + 2 Ni(OH)_2$ Laden/Entladen $Cd + 2 Ni(OH)_2$

– **Brennstoffzelle:**

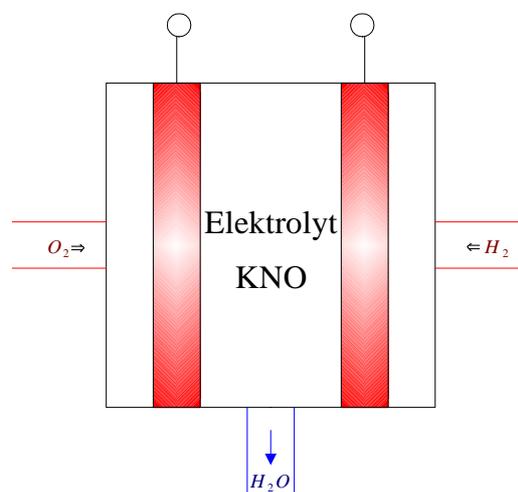
Theoretisch:

Differenz der freien Enthalpien zwischen Reaktionsprodukt und Reaktionspartnern:

$$\Delta G = \Delta (U + p \cdot V - T \cdot S) ;$$

$$\Delta G = \Delta H - T \Delta S ; \Delta H : \text{Heizwert}; \Delta S : \text{Wärme}$$

Beispiel „Knallgaszelle“:



Negative Elektrode: $2 \text{H}_2 + 4 \text{OH}^- \rightarrow 4 \text{H}_2\text{O} + 4 \text{e}^-$

Positive Elektrode: $\text{O}_2 + 2 \text{H}_2\text{O} + 4 \text{e}^- \rightarrow 4 \text{OH}^-$

Summe: $2 \text{H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2 \text{H}_2\text{O}$

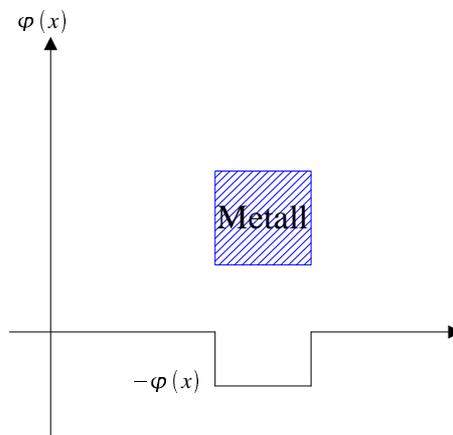
Leerlaufspannung $\approx 1 \text{ V}$; im Betrieb ca. $0,6 - 0,8 \text{ V}$

PEM-Brennstoffzelle (Polymer-Elektrolyt-Membran)

3.5 Austrittsarbeit gegen Vakuum, Thermospannung

Leitungselektronen im Metall sind „frei“ beweglich, aber im Metall gebunden. Um sie aus diesem Verband zu lösen, muss Arbeit gegen die Coulombkräfte aufgebracht werden (Austrittsarbeit).

Veranschaulichung:

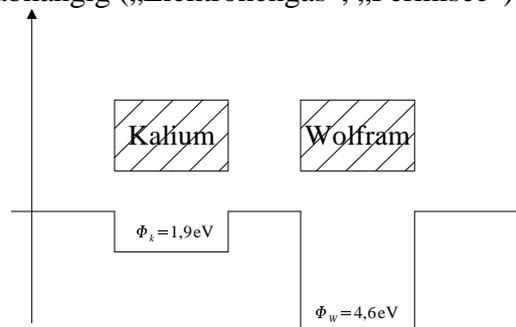


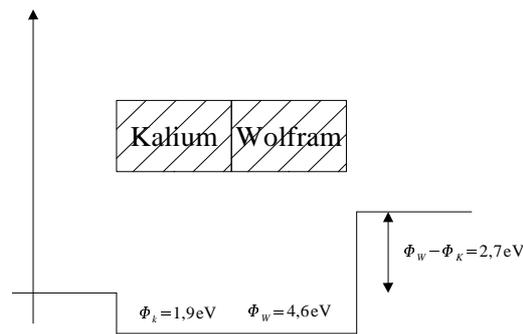
Messung: z.B. durch Photoeffekt (Lösen von Elektronen aus dem Material durch Absorption von Lichtquanten $h \mu$).

Austrittsarbeit hat für alle Metalle dieselbe Größenordnung (ca. $1,9 - 4,8 \text{ eV}$):

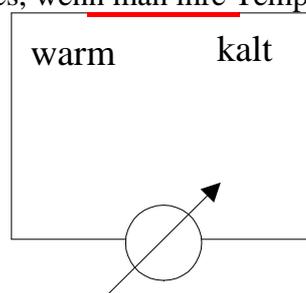
K, Na, Al, Zn, Pb, Sn, Bi, Fe, Cu, W (in Reihenfolge aufsteigender Austrittsarbeit)
noch geringer: BaO ($0,99 \text{ eV}$)

Austrittsarbeit ist temperaturabhängig („Elektronengas“, „Fermisee“)





Die Kontaktspannung könnte man messen, indem man die Teile wieder trennt und die Ladungen auf beiden Seiten bestimmt. Besser geht es, wenn man ihre Temperaturabhängigkeit ausnutzt:



Grobe Abschätzung: $e \cdot \Delta U \approx k_B \Delta T$;

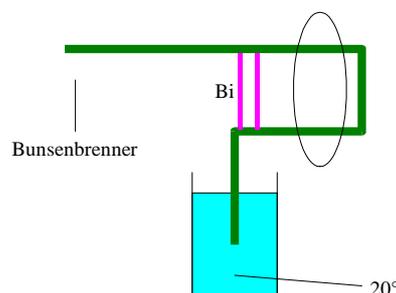
$$\frac{\Delta U}{\Delta T} \approx \frac{k_B}{e} \approx 10^{-4} \frac{\text{V}}{\text{grad}} ;$$

„Thermoelektrische“ Spannungsreihe

Meist: Blei als „Nullelement“, für die anderen Elemente ist die Thermospannung gegen Blei angegeben.

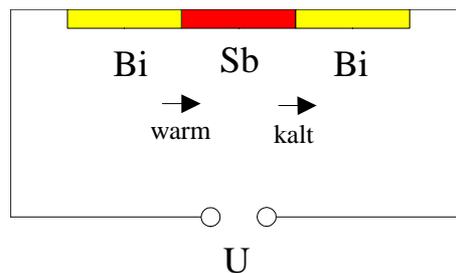
a) Seebeck-Effekt (1822):

Anwendungen: Thermoelement (dient zur Temperaturmessung; z.B. Kupfer-Konstantan $\approx 41 \mu\text{V} / \text{grad}$)



b) Peltier-Effekt: (Jean Peltier, 1785 - 1845)

Energetische Umkehrung des Seebeck-Effekts



Elektronen haben in verschiedenen Materialien verschiedene spezifische Wärme; wenn man sie durch Spannung von einem Material in ein anderes treibt, entsteht eine Temperaturdifferenz.

3.6 Kirchhoffsche Regeln

a) Knotenregel

In einem Knoten ist die Summe der hineinfließenden Ströme gleich der Summe der hinausfließenden Ströme.

$$\sum_n I_n = 0 ;$$

b) Maschenregel

In einer Masche ist die Summe der Spannungsabfälle gleich der Summe der Spannungsquellen.

$$\sum_{EMK} U_{EMK} = \sum_j I_j R_j ; \quad \sum U_R = 0 ;$$

Anwendung:

a) Serienschaltung von Widerständen:

$$\text{Maschenregel: } U = I (R_1 + R_2 + R_3) = I R ; \quad R = R_1 + R_2 + R_3 ;$$

b) Parallelschaltung von Widerständen:

Maschenregel:

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0 ;$$

$$I_2 R_2 - I_3 R_3 = 0 ; \Rightarrow I_1 R_1 = I_2 R_2 = I_3 R_3 = U ;$$

$$I_1 R_1 - I_3 R_3 = 0 ;$$

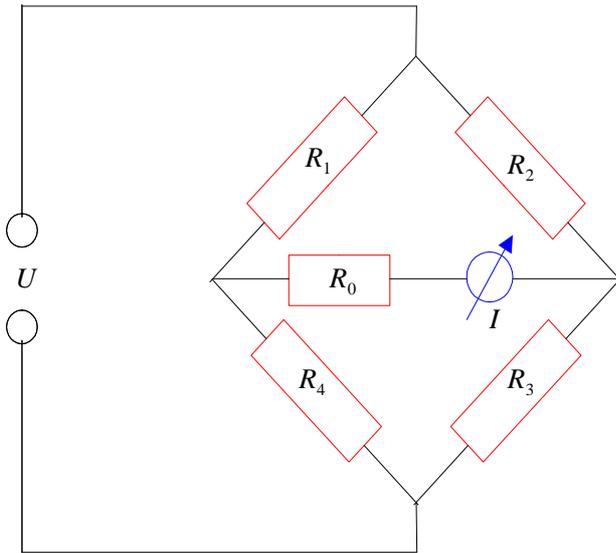
Knotenregel:

$$I - I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} \quad \Rightarrow \quad I = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = U \frac{1}{R} ;$$

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} ;$$

c) Wheatstonesche Brücke (zur Messung von Widerständen):

Regelung des Schiebewiderstandes derart, dass $I_0 = 0$. Gemessen werden soll R_2 .



Knotenregel:

$$I_3 = I_1 + I_0;$$

$$I_0 + I_4 = I_2;$$

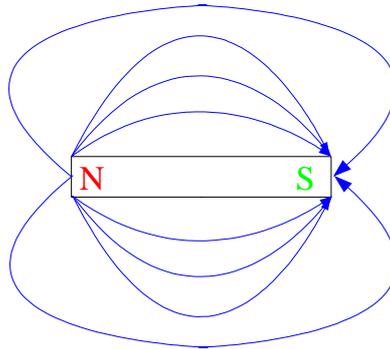
Maschenregel:

$$U_0 + U_2 = U_1;$$

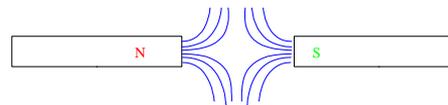
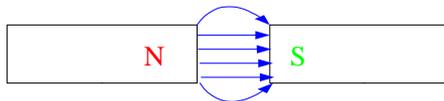
$$U_0 + U_3 = U_4;$$

Da $I_0 = 0$ und $U_0 = 0$: $\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}$; $\frac{R_1}{R_3}$ kann man am Schiebewiderstand ausmessen (Stellung).

C.4 Das magnetische Feld



- Das nach Norden zeigende Ende eines frei beweglichen Magneten bezeichnet man als Nordpol, das nach Süden zeigende als Südpol.
- Gleichnamige magnetische Pole stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an.



- Magnetische Feldlinien gehen von Nord nach Süd.
- Magnetpole lassen sich nicht trennen. Ein Magnet ist ein magnetischer Dipol.
- Auf eine ruhende Ladung wirkt im Magnetfeld keine Kraft.
- Eine bewegte Ladung wird im Magnetfeld senkrecht zum Magnetfeld und senkrecht zur Bewegungsrichtung abgelenkt.

„**Rechte-Hand-Regel**“: U-V-W (Ursache-Vermittlung-Wirkung): Der Daumen zeigt in die technische Stromrichtung (Strom = Ursache), der Zeigefinger in Richtung des Magnetfeldes (Feld = Vermittlung), der Mittelfinger zeigt dann in Richtung der Kraft (Kraft = Wirkung).

Diese Kraft heißt

$$\text{Lorentzkraft } \vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}).$$

Da die Lorentzkraft senkrecht zu \vec{v} wirkt, ändert sich unter Einfluss der Lorentzkraft nur die Richtung, nicht der Betrag von v . E_{kin} des geladenen Teilchens bleibt konstant.



Kraft auf stromdurchflossenen Leiter: $F = l A n q (\vec{v} \times \vec{B})$;

$l A n q$: Ladungsmenge im Leiter im B-Feld.

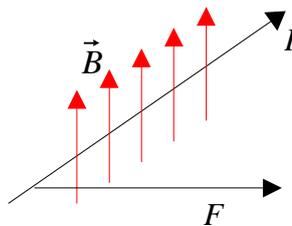
– $F = l \cdot (\vec{I} \times \vec{B})$ mit $\vec{I} = n q A \vec{v}$.

- Ein stromdurchflossener magnetischer Leiter ist von geschlossenen, ringförmigen magnetischen Feldlinien umschlossen. Diese verlaufen senkrecht zu \vec{I} in Form konzentrischer Kreise.

Richtung der magnetischen Feldlinien ist definiert durch „**rechte-Hand-Regel**“: Der Daumen zeigt in die technische Stromrichtung, dann zeigen die gekrümmten anderen vier Finger in Richtung des B-Feldes.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r}; \quad \frac{\mu_0}{2 \pi} = const;$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2 \pi} \frac{\vec{I} \times \vec{r}}{r^2};$$



- Absolutbestimmung des B-Feldes über Ausmessung der Kraft zwischen zwei Strom durchflossenen Leitern.
2 in gleiche Richtung durchflossene Stromleiter ziehen sich an. Der linke Draht erzeugt am Ort des rechten Drahtes

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 \pi d},$$

dieses B bewirkt Lorentzkraft auf rechten Draht

$$F = l \cdot I \cdot B = l \cdot \frac{\mu_0 I^2}{2 \pi d}.$$

$$1 \text{ T(esla)} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m} \cdot \text{A}} = \frac{\text{V s}}{\text{m}^2}; \quad 1 \text{ G(auß)} = 10^{-4} \text{ T}.$$

$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}}$ Festlegung durch Kraftmessung bei stromdurchflossenen Leitern.

Achtung: In manchen anderen Lehrbüchern, z.B. Grimsehl, ist die Größe $\vec{H} = \vec{B} / \mu_0$ als **magnetische Feldstärke** definiert, die Größe \vec{B} dagegen als **magnetische Flussdichte** oder **magnetische Induktion**.

4.1 Quellenfreiheit des magnetischen Feldes, Zirkulation des magnetischen Feldes

Aus der Tatsache, dass die magnetischen Feldlinien stets in sich geschlossen sind, folgt:

$$\oint_{\text{geschlossene Fläche}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0; \text{ Quellenfreiheit des magnetischen Feldes.}$$

Zirkulation des magnetischen Feldes:

$$\oint_{\text{geschlossener Weg}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I = \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{A} = \int \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

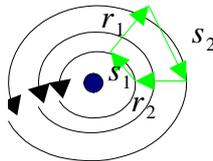
Ampèresches Gesetz

(sofern elektrischer Leiter eingeschlossen)

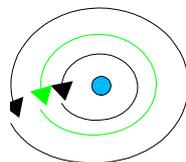
Vergleich mit elektrischem Feld:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho \cdot dV \text{ (Gaußscher Satz); } \oint_A \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0;$$

das elektrische Feld ist also wirbelfrei, hat aber Quellen.



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 I}{2 \pi} \left(\frac{s_1}{r_1} - \frac{s_2}{r_2} \right) = 0;$$



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r} \cdot 2 \pi r = \mu_0 I;$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I = \mu_0 \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \int_A \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_a (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A}; \text{ elektrisch: } \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0;$$

$$\mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{B};$$

Anwendung des Ampèreschen Gesetzes

1) Magnetfeld innerhalb und außerhalb eines **homogenen** Stromleiters

	<p>Im Inneren:</p> $\oint \vec{B} d\vec{s} = B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I_0 \frac{r^2}{R_0^2}$ $\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_0^2};$
	<p>Außen: $r \geq R_0$</p> $\int \vec{B} d\vec{s} = B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I_0;$ $\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r};$

2) B-Feld im Koaxkabel

	<ul style="list-style-type: none"> - äußerer Leiter für sich kreiert laut Ampèreschem Gesetz kein inneres B-Feld - innerer Leiter kreiert B-Feld in umgekehrter Richtung wie äußerer Leiter - wegen Superposition nur B-Feld zwischen den beiden Leitern, außen $B = 0$
--	---

3) B-Feld einer langen homogen gewickelten Spule

	$\oint \vec{B} d\vec{s} = B_{\text{innen}} \cdot L - \cancel{B_{\text{außen}} \cdot L} = \mu_0 I_0 \cdot N;$ <p>(N: Anzahl der Windungen); da $B_{\text{außen}} \ll B_{\text{innen}}$;</p> $B_{\text{innen}} = \frac{\mu_0 I_0 N}{L} = \mu_0 I_0 n;$ <p>(n: Windungszahl pro Länge)</p>
--	---

Typische Magnetfelder

- a) Erdmagnetfeld 0,3 - 0,5 Gauß
- b) wassergekühlte Magnetspulen maximal 25 Tesla (wegen ohmscher Heizung ist Kühlung nötig)
- c) supraleitende Magnetspulen, gängige Felder 5 - 15 Tesla
- d) gepulste Magnetfelder 100 Tesla

4.2 Biot-Savartsches Gesetz

Ampèresches Gesetz ist geeignet für Berechnung von B in einfachen Symmetrien, z.B. Zylindersymmetrie.

Im Praktischen: Berechnung von B für komplizierte Stromleitung eignet sich besser

$$\text{Biot-Savartsches Gesetz: } d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} (d\vec{l} \times \vec{r});$$

Gesamtfeld durch Addition/Integration über alle $d\vec{l}$, Superposition gilt!

Beispiel: Feld im Zentrum einer Ringspule

$$\vec{B} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} (d\vec{l} \times \vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} 2\pi R \cdot R = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I \pi R^2}{2\pi R^3} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi R^3}; \text{ mit}$$

$$I \cdot \text{Fläche} = \vec{m} \text{ magnetisches Moment senkrecht auf Fläche}$$

Man schaut in Richtung von \vec{m} , wenn Strom in Uhrzeigersinn durch Schleife fließt:

4.3 Hall-Effekt

Kraft auf stromdurchflossenen Leiter $\vec{F} = l \cdot (\vec{I} \times \vec{B})$ sagt nichts über Polarität der Stromträger aus. Hall-Effekt gibt Vorzeichen der Ladungsträger für Strom an.

$$\begin{aligned} \vec{I} &= I_x; & j_x &= q n v_D; \\ \vec{B} &= B_y; \\ q &= q_+; \end{aligned}$$

Lorentzkraft wirkt (UVW) und bewirkt Anhäufung von Ladungsträgern in z-Richtung \Rightarrow Aufbau von E_z durch Strom I_x und B_y .

Insgesamt gilt Kräftegleichgewicht in z-Richtung:

$$q \cdot E_z + q \cdot v_D B_y = 0;$$

$$E_z = -v_D B_y \text{ mit } j_x = n q v_D;$$

$$E_z = -\frac{j_x}{nq} B_y$$

Hallgleichung

- Richtung von E_z gibt Polarität des Ladungsträgers an
- E_z , B_y , j_x bekannt bzw. gemessen ergibt Ladungsträgerdichte n
z.B. ist für alle Alkalimetalle $n \approx 1 e^- / \text{Atom}$;
- E_z , j_x , n bekannt bzw. gemessen ergibt $B_y \Rightarrow$ Hallsonde als Magnetometer
Versuch GaAs

4.4 MHD-Generator (Magnetohydrodynamischer Generator)

- Verbrennung bei sehr hohen Temperaturen \Rightarrow Plasma (Ionisation der Verbrennungsprodukte)
- Plasmastrom wird in B-Feld wegen Lorentzkraft in positive und negative Ladungsträger getrennt \Rightarrow EMK abgreifbar

4.5 Generator + Motor

	<ul style="list-style-type: none"> – rechteckige Leiterschleife in B-Feld – durch Drehung von außen bewegen sich Ladungsträger im Leiter \perp zu B – Wirkung \rightarrow Ladungstrennung \rightarrow E-Feld \rightarrow EMK – im Gleichgewicht gilt $q \cdot E + q v B = 0$; – Gesamt-EMK $\int_0^l \vec{E} d\vec{s} = -B v l$ kann als Generatorleistung abgegriffen werden
--	---

Nachtrag: B-Feld ist in der Ringspule kreisförmig eingeschlossen. Wieso gibt es ganz innen und ganz außen kein B-Feld? Antwort: Ampèresches Gesetz:

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 N I.$$

Umkehrung des Prinzips: Anschluss von Strom / Spannungsquelle an Leiter (Grafik siehe oben):

- Lorentzkraft bewirkt Drehmoment auf a
- Drehmoment $D = F_{Lorentz} \cdot b \cdot \sin \vartheta$ (wobei $\vartheta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$ Winkel zwischen B-Feld und Normalenvektor der Fläche)

$$D = I B a b \sin \vartheta \equiv \vec{m} \times \vec{B}$$

magnetisches Dipolmoment $\vec{m} = I \cdot a \cdot b \cdot \vec{n}_{(a,b)}$; $\vec{n} = \vec{A} / A$;

\vec{n} ist der Normaleneinheitsvektor.

Anwendung:

a) **Motor:**

- bei Gleichstrommotor \rightarrow Kommutator notwendig für konstante Drehung
- Drehung durch Stromfluss bewirkt gleichzeitig eine EMK (wie bei Generator), welche der von außen anliegenden Spannung entgegengerichtet ist. Diese EMK kann max. Betrag der von

außen angelegten Spannung sein. \Rightarrow Dann hat Motor max. Drehzahl. Bei maximaler Drehzahl kann Motor keine Leistung mehr aufnehmen, und daher keine Arbeit mehr verrichten.

b) **Drehstromgalvanometer:** kein Kommutator, Spiralfeder als Gegenkraft zum Drehmoment, Winkel ϑ dient als Strommessung.

c) **Präzession von Atomen in Magnetfeldern:**

- Kreisstrom der Elektronen um Atomkern bewirkt \vec{m}
- Auf Grund des Bahndrehmoments richtet sich magnetisches Moment nicht längs \vec{B} aus, sondern führt Präzessionsbewegung um \vec{B} aus (\rightarrow Kreisel).

4.6 Zyklotronfrequenz

	<ul style="list-style-type: none"> – homogenes \vec{B}-Feld \perp zur Zeichenebene – e mit $\vec{v}_e \perp \vec{B} \Rightarrow$ Kreisbahn $F_{\text{Lorentz}} = q \cdot v \cdot B = m \omega^2 r = m \frac{v^2}{r}$ <p>(Zentrifugalkraft)</p>
--	---

$$\omega = \frac{q \cdot B}{m} \text{ Zyklotronfrequenz}$$

ω unabhängig von r : $r = \frac{m v}{q \cdot B}$;

Anwendung: Zyklotron zur Beschleunigung von geladenen Teilchen

	<ul style="list-style-type: none"> – $\vec{B} \perp$ Zeichenebene – halbkreisförmige Polschuhe entgegengesetzt geladen mit Wechselspannung der Kreisfrequenz $\omega = \frac{q \cdot B}{m}$ – geladene Teilchen werden im E-Feld \perp B-Feld beschleunigt, vergrößern Radius bei gleichem ω bis zur Extraktion
--	---

Massenseparator:

	Separation von Isotopen
--	-------------------------

4.7 Das Faradaysche Induktionsgesetz

Bis jetzt:

- Erzeugung von B durch I (Ampèresches Gesetz)

- Kraftwirkung auf bewegte Ladungen (Lorentzkraft)

Neu:

- Umkehrung: Erzeugung von I bzw. EMK durch $d B / d t$
- alles in Ruhe $\Rightarrow U = 0$
- Bewegung der Leiterschleife oder des Magnetfeldes $U \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$
- $\vec{A} \perp \vec{B}$ Bewegung $\Rightarrow U = 0$
- Ersatz des Stabmagneten durch Elektromagneten, gleiche Effekte
- Ein- und Ausschalten des Elektromagneten $\Rightarrow U \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$
- Verdoppeln der Schleifenanzahl, U größer

In einer Leiterschleife wird eine Spannung U induziert, wenn sich der durch die Leiterschleife hindurchgreifende magnetische Fluss zeitlich ändert:

$$U_{ind} = - \frac{d(\vec{B} \cdot \vec{A})}{d t} = - \frac{d}{d t} \int_A \vec{B} d \vec{A} = - \frac{d \Phi}{d t}$$

magn. Fluss

Faradaysches Induktionsgesetz

4.8 Zum Vorzeichen im Faradayschen Induktionsgesetz bzw. der Lenzschen Regel

- An Leiterschleife anliegende Spannung U bezeichnet Strom $I = U / R$ (R : Innenwiderstand der Leiterschleife)
- I induziert wiederum Magnetfeld
- Energieerhaltung gilt: Stromfluss produziert Leistung $P = I^2 R$ (Erwärmung der Leiterschleife). Woher kommt diese Leistung? Aus kinetischer Energie des bewegten Teiles. Auf die muss also Bremskraft wirken.
- Das durch den Induktionsstrom in der Drahtschleife erzeugte B_{ind} muss also jeweils die Bewegung abbremsen:

--	--

Lenzsche Regel: Die durch die Änderung magnetischer Flüsse erzeugten Induktionsströme fließen derart, dass ihre eigenen Magnetfelder der Induktionsursache entgegenwirken.

Welche Kräfte wirken?

– Leiterschleife $\vec{v} \perp \vec{B}$:

$$I = \frac{U}{R} = -\frac{d(B l x)}{R d t} = -\frac{B l d x}{R d t} = -\frac{B l}{R} v;$$

– induzierter I bewirkt Lorentzkraft:

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = l (\vec{I} \times \vec{B}) = -\frac{B^2 l^2}{R} v \propto \begin{cases} B^2 \\ v \\ \frac{1}{R} \\ l^2 \text{ oder } n^2 \end{cases}$$

⇒ Prinzip der Wirbelstrombremse.

induzierte Spannung $U_{\text{ind}} = -B l v = \oint \vec{E} d \vec{s}$;

Koeffizientenvergleich: $B v = E$; $\Rightarrow \vec{B} \times \vec{v} = \vec{E}$;

$q (\vec{B} \times \vec{v}) = q \vec{E}$; **Lorentzkraft = elektrostatische Kraft**

4.9 Relativistischer Zusammenhang zwischen E- und B-Feld

Bisher: Kräfte der Elektrostatik (Coulombgesetz) und magnetische Kräfte (Lorentzkraft) ohne Zusammenhang nebeneinander.

Naturkonstanten für beide Kräfte:

$$\frac{1}{4 \pi \epsilon_0} = 8,987 \cdot 10^9 \frac{\text{N m}}{(\text{A s})^2};$$

$$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2};$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{4 \pi \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ A}^2}{4 \pi \cdot 10^{-7} (\text{A s})^2 \text{ N}}} = 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \equiv c$$

(Vakuumlichtgeschwindigkeit);

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2;$$

Empirisch hängen die die beiden Kräfte bestimmenden Konstanten über Lichtgeschwindigkeit zusammen.

Suggestiv wirft sich die Frage auf, ob Elektrostatik und Magnetismus über Wahl des Bezugssystems zusammenhängen!

Beispiel: stromdurchflossener Leiter und Ladung q im Abstand r .

<p>Lorentzkraft wirkt:</p> $F(r) = \underbrace{q \cdot B \cdot v}_{\frac{\mu_0 I}{2 \pi r}} = q \frac{\mu_0 I}{2 \pi \varepsilon} v = \frac{1}{2 \pi \varepsilon_0} \frac{q \varrho_- A \cdot v}{r c^2}$ <p>; $I = \varrho_- \cdot A \cdot v$, $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0} c^2$;</p> <p>Coulombkraft wirkt nicht, da $\varrho_+ = \varrho_-$.</p>	<p>Coulombkraft wirkt wegen relativistischer Komprimierung von $\varrho_+ \rightarrow \varrho'_+$ und Dilatation von $\varrho_- \rightarrow \varrho'_-$.</p> $\varrho'_+ = \frac{\varrho_+}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \varrho'_- = \varrho_- \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2};$ <p>Ohne Herleitung: Ladungsträgerkonzentration ändert sich wegen relativistischer Dilatation/Komprimierung von Längen.</p> <p>\Rightarrow Ladungsträgerdifferenz $\varrho' = \varrho'_+ - \varrho'_- =$</p> $= \varrho_+ \frac{v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};$ $F' = q \cdot E' = \frac{1}{2 \pi \varepsilon_0} \frac{q \cdot A \cdot \varrho_+ v^2}{r c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}};$ $E' = \frac{\lambda}{2 \pi \varepsilon_0 r}.$ <p>Es wirkt keine Lorentzkraft, da q und ϱ_- ruhen.</p>
---	--

Vergleich:

$$F' = F \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Beim Übergang von $S \rightarrow S'$ werden magnetische Kräfte zu elektrostatischen Kräften transformiert. $F \neq F'$. \Rightarrow Kräfte sind nicht invariant gegenüber „Lorentztransformation“.

Wird werden jedoch später invariante Schreibweise der elektromagnetischen Wechselwirkung kennenlernen.

4.10 Beispiele zum Induktionsgesetz

Induktionsgesetz inkl. Lenzscher Regel bedeutet, dass gut leitende Schleife im Magnetfeld eigenes Magnetfeld aufbaut, und zwar so, dass der Fluss durch die Schleife nahezu konstant bleibt (bei Bewegung!). Ein guter Leiter zieht also B-Feld mit sich.

- Asymmetrie des erdmagnetischen Feldes durch Plasmawind.
- Drehstrommotor

- Wechselstrom, Drehstrom, jeweils 120° Phasenverschiebung
- im Zentrum entsteht rotierendes B-Feld mit $\nu = 50$ Hz
- drehendes B-Feld nimmt leitenden Rotor mit

- Magnetschwebbahn

4.11 Selbstinduktion

Bei Formulierung der Lenzschen Regel bereits festgestellt, dass der durch eine äußere Flussänderung $d\Phi/dt$ induzierte Strom selbst wieder ein B-Feld erzeugt/induziert.

Diese Induktion ist aber keinesfalls auf eine äußere Flussänderung beschränkt, sondern wird durch eine Änderung des eigenen Magnetfeldes/Magnetflusses hervorgerufen.

$$U_{ind, selbst} = -\frac{d\Phi_{eigen}}{dt} = -L \frac{dI}{dt}, \quad [V] = \left[\frac{Vs}{A} \right] \left[\frac{A}{s} \right], \quad 1 \left[\frac{Vs}{A} \right] = 1 \text{ H (Henry)},$$

wobei der eigene magnetische Fluss $\propto I$ ist. Die Proportionalitätskonstante L heißt **Selbstinduktivität**, hängt von der Geometrie der Leiterschleife ab. Negatives Vorzeichen drückt aus, dass die selbstinduzierte Spannung der angelegten Spannung entgegenwirkt.

Selbstinduktion in Spule bei Ein- und Ausschalten:

Kirchhoffsche Maschenregel:

$$U = U_{ind} = R \cdot I;$$

$$U - L \frac{dI}{dt} = R \cdot I; \quad \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{U}{L} \quad \text{Differenzialgleichung.}$$

Einschalten: zur Zeit $t=0$ ist $I=0$.

Lösungsansatz:

$$I(t) = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right),$$

Beweis durch Einsetzen in DGL.

Ausschalten: zur Zeit $t=0$ ist $U=0$:

$$\Rightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} I; \quad \int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\int_0^t \frac{R}{L} dt; \quad \ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L} t;$$

$$\Rightarrow I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Berechnung von L für Spule:

bekannt aus § C.4.1: B-Feld in Spule $B = \mu_0 I N/l \Rightarrow$

$$\Phi = B \cdot A = \mu_0 I \frac{N}{l} A \quad \text{für eine Windung;}$$

$$U_{ind, selbst} = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 \frac{N^2}{l} A \frac{dI}{dt} \equiv -L \frac{dI}{dt} \Rightarrow$$

$$L_{Spule} = \mu_0 \frac{N^2}{l} A.$$

$L \propto N^2$, da N einmal über Fluss erzeugung und einmal über Wegintegral eingeht.

Anwendung: Transformator

- Zwei Kupferdrähte werden parallel zu einer Spule gewickelt
 - dI/dt in Spule 1 bewirkt Induktion in Spule 2 und umgekehrt.
- ⇒ wechselseitige Induktion

- technische Realisierung im Trafo mit Trennung der beiden Spulen und „Transport“ des B-Feldes über Weicheisenjoch.

$$- U_{ind,2} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}, \quad U_{ind,1} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt};$$

- Analog zur Selbstinduktion $L \propto N^2$ gilt: $L_{21} \propto N_1 N_2 \Rightarrow L_{21} = L_{12}$

- Annahme: vollständige magnetische Kopplung:

$$\frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} = 1.$$

$$U_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} \quad \text{mit} \quad L_1 = \mu_0 \mu_r \frac{N_1^2}{l} A \quad (\mu_r \text{ relative Permeabilität} > 1 \text{ mit Weicheisen als Joch})$$

$$U_2 = -L_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad \text{mit} \quad L_{21} = \mu_0 \mu_r \frac{N_1 \cdot N_2}{l} A \Rightarrow$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

Trafogleichung

4.12 Magnetische Feldenergie

Bei (Gleich)stromdurchfluss durch Spule gibt es Leistungsbedarf zwecks Kompensation der ohmschen Verluste. Dies hat nichts zu tun mit der Energie, welche benötigt wird, um B-Feld aufzubauen.

Beim Einschalten der Spule liegt Spannung U_L an (obwohl widerstandsfrei!), um U_{ind} zu überwinden. Hierzu wird Leistung benötigt.

$$U_L = -U_{ind};$$

$$dW = U_L \cdot I dt = L \frac{dI}{dt} \cdot I dt = L I dI \Rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2} L I_0^2 \text{ wird benötigt zum Aufbau des B-Feldes.}$$

⇒

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 \underbrace{\frac{N^2}{l} A}_{L} I_0^2 = \frac{B^2}{2 \mu_0} A l$$

Formel für B in Spule.

$$\frac{W}{V} = \frac{B^2}{2 \mu_0}$$

Energiedichte des magnetischen Feldes

Beim Ausschalten des magnetischen Feldes oder des Stromes bewirkt diese Energie, dass I langsam abklingt bzw. in ohmschem Widerstand verheizt wird.

Die in die ohmsche Heizung nach Abschalten gesteckte Leistung beträgt

$$\frac{dW}{dt} = I^2 \cdot R = I_0^2 R e^{-2\frac{R}{L}t};$$

$$W = \int_0^{\infty} I_0^2 R e^{-2\frac{R}{L}t} dt = I_0^2 \frac{L}{2} \text{ q.e.d.}$$

Die in ohmscher Heizung nach Abschaltung verbrauchte Energie entspricht der im Magnetfeld gespeicherter Energie.

4.13 Schwingkreis

	$U_L + U_R + U_C = 0;$ $L \frac{dI}{dt} + R \cdot I + \frac{Q}{C} = 0$ <p>mit $I = \frac{dQ}{dt}; \frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2};$</p>
--	--

Differenzialgleichung 2. Grades:

$$\text{für } Q(t): \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} = 0;$$

Differenzieren nach dt :

$$\text{für } I(t): \frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = 0;$$

Beide Gleichungen sind bereits bekannt aus der Mechanik: vgl. gedämpfter harmonischer Oszillator.

usw. für $U_C(t), U_L(t), U_R(t)$

Elektrodynamik	Mechanik
$\frac{d^2 I}{d t^2} + \frac{R}{L} \frac{d I}{d t} + \frac{I}{L C} = 0 ;$	$\frac{d^2 x}{d t^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{d x}{d t} + \frac{k}{m} x = 0 ;$
$I(t) = (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t) e^{-\beta t}$	$x(t) = (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t) e^{-\beta t} ;$
$\beta = \frac{R}{2 L}, \quad \tau = \frac{L}{R} ;$	$\beta = \frac{\gamma}{2 m}, \quad \tau = \frac{m}{\gamma} ;$
$\omega_0^2 = \frac{1}{L C}$	$\omega_0^2 = \frac{k}{m} ;$
elektrische Energie: $\frac{1}{2} \frac{1}{C} Q^2$	potenzielle Energie: $\frac{1}{2} k x^2$
magnetische Energie: $\frac{1}{2} L I^2$	kinetische Energie: $\frac{1}{2} m v^2$

Das Hin- und Herpendeln zwischen magnetischer und elektrischer Energie im Schwingkreis kann am ungedämpften Schwingkreis ($R = 0$) sichtbar gemacht werden.

$I = I_0 \cos \omega_0 t$		
$U_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I dt = \frac{I_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$		
$U_L = L \frac{d I}{d t} = -L \omega_0 \sin \omega_0 t$		
$\omega_0 t = -\frac{\pi}{2}$	$\omega_0 t = 0$	$\omega_0 t = \frac{\pi}{2}$

Komplexer Wechselstromwiderstand

- Ohmscher Widerstand $U(t)$ und $I(t)$ sind in Phase; $U = R \cdot I$;
- Induktiver Widerstand $U = i \omega L I$;
 i drückt hier eine Drehung um 90° aus, da sie Spannung um 90° vorseilt;
- Kapazitiver Widerstand

$$U = -i \frac{1}{\omega C} \cdot I ;$$

die Spannung hinkt um 90° nach

Zusammenfassend: $U = R \cdot I \rightarrow U' = Z' \cdot I'$, Z' : komplexer Widerstand, wobei Phasenverschiebung durch komplexe Schreibweise ausgedrückt wird.

Analog gibt komplexe Leitfähigkeit $Y' = 1 / Z'$.

Komplexer Gesamtwiderstand in Reihenschaltung von L, R, C :

$$Z' = Z'_R + Z'_L + Z'_C = R + i \omega L - \frac{i}{\omega C} = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

4.14 Erzwungener Schwingkreis

	<p>Maschenregel für Serienschaltung von R, L, C:</p> $U_L + U_R + U_C = -U_0 \cos \omega t;$ $I_L = I_R = I_C;$ $\Rightarrow L \frac{dI}{dt} + R \cdot I + \frac{Q}{C} = -U_0 \cos \omega t$ $\Rightarrow \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = \frac{U_0 \omega}{L} \sin \omega t;$
--	---

Differenzialgleichung 2. Grades, analog zu periodisch angetriebener mechanischer Schwingung.

Lösungsansatz: $I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$;

$$\tan \varphi = \frac{-\omega / \tau}{\omega_0^2 - \omega^2}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \quad \tau = \frac{L}{R};$$

$$I_0 = \frac{U_0 \omega / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \tau^2}};$$

Spannung und Strom sind phasenverschoben. Wie beim gedämpften Oszillator sind $U_L(t)$ und $U_C(t)$ um 180° phasenverschoben.

Der Betrag des gesamten komplexen Wechselstromwiderstands:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2};$$

Wie groß kann U_L maximal werden?

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = \omega L \underbrace{I_0}_{I_{0, \max} = I_0 \omega_0 = \frac{U}{R}} \cos(\omega t + \varphi) = \underbrace{\frac{\omega_0 L U_0}{R}}_{U_L^\circ} \cos(\omega t + \varphi);$$

$$\frac{U_L^\circ}{U_0} = \frac{\omega_0 L}{R} = \omega_0 \tau \equiv Q \quad \text{Gütefaktor } Q \text{ bekannt aus der Mechanik}$$

	<p>Knotenregel für Parallelschaltung von L, R, C</p> $I_R + I_L + I_C = I(t);$ $U_R = U_L = U_C;$
--	--

Resonanzfrequenz

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L C}; \quad \tau = R \cdot C;$$

$$Z \text{ (Impedanz = komplexer Wechselstromwiderstand): } Z = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{i \omega L} + i \omega C \right)^{-1};$$

$$\tan \varphi = R \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right);$$

$$|Z| = \left[\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}};$$

$$Q = \omega_0 \tau = \frac{1}{\sqrt{L C}} \cdot R C = \frac{R}{\sqrt{L/C}};$$

im Resonanzfall $\tan \varphi = 0$, maximaler $|Z| \Rightarrow$ minimales I , maximales U .

Leistungsabgabe am ohmschen Widerstand für Wechselstrom

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = \frac{U(t)^2}{R} = \frac{U_0^2}{R} \cos^2 \omega t;$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R}$$

\Rightarrow Gleichspannung mit Amplitude $U_0 / \sqrt{2}$ ergibt selbe Leistung

$\Rightarrow 220 \text{ V } U_{\text{eff}} \text{ Wechselspannung } \Rightarrow U_0 = 220 \cdot \sqrt{2} = 311 \text{ Volt}$

Leistungsabgabe am ohmschen Widerstand:	Leistungsabgabe am L, R, C -Kreis:
---	--------------------------------------

Negative Leistungsaufnahme bedeutet, dass elektrisch oder magnetisch gespeicherte Energie in dem L, R, C -Gliedern wieder ins Netz abgeführt wird. Es kann auch null Leistungsaufnahme stattfinden, wenn Phase $\Psi = 90^\circ$.

C.5 Materie im Magnetfeld

Bekannt: Rückwirkung von Materie im E-Feld auf das E-Feld selbst.

- induziertes elektrisches Dipolmoment \vec{p}
- Ausrichtung von permanenten elektrischen Dipolmomenten

Neu: Für Materie im B-Feld gilt Analoges → magnetisches Dipolmoment \vec{m}

Was verursacht auf mikroskopischer Ebene m?

→ Bahndrehimpuls: e^- kreisen um Atomkern, \Rightarrow Ringstrom $\Rightarrow \vec{m} = I \cdot \vec{A}$

Achtung: Quantenmechanik sagt, dass viele Atome im Grundzustand $m = 0$ haben.

$$\vec{m}_L = \frac{e}{2 m_e} \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i = -\mu_B \vec{L};$$

$$\mu_0 = \frac{e \hbar}{2 m_e} = 9,3 \cdot 10^{-24} \text{ A m}^2; \text{ Bohrsches Magneton.}$$

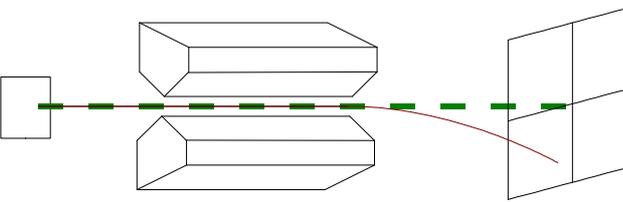
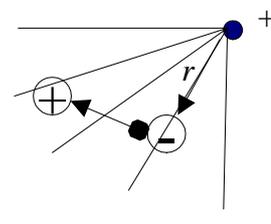
→ **Elektronenspin:** Quantenmechanik → Elektron hat Eigendrehimpuls (Spin) $\pm 1/2 \hbar$, und ist damit Träger eines magnetischen Moments.

Achtung: Gemäß Pauliprinzip sind Elektronen jeweils zu Spin $\uparrow \downarrow$ gepaart \Rightarrow Gesamtspin = 0 $\Rightarrow \vec{m} = 0$.

→ **Kernspin:** Nukleonen haben gleichen Spin wie Elektronen $\delta = 1/2 \hbar$, aber wegen [...]

Welche Kräfte wirken auf magn. bzw. elektr. Dipolmoment?

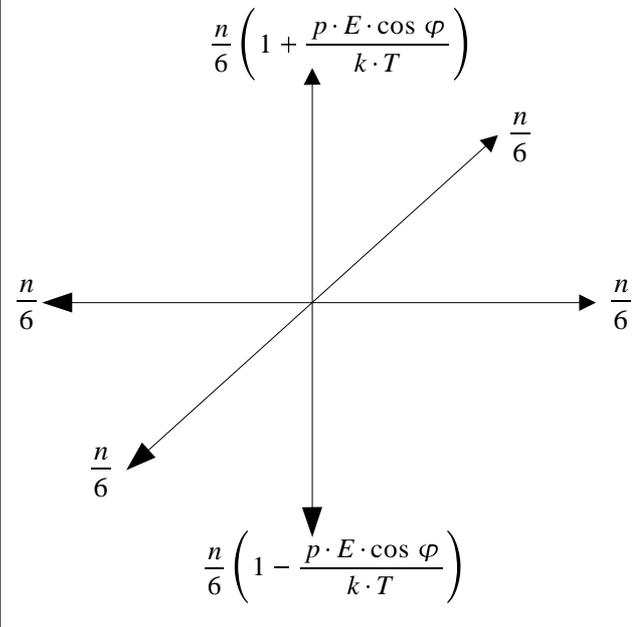
<i>Magnetismus</i>	<i>Elektrostatik</i>
Gesamtmoment im homogenen Feld	
$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$ mit $\vec{m} = I \cdot \vec{A}$; \vec{m} : magnetisches Dipolmoment	$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F}$ $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$ mit $\vec{p} = q \cdot \vec{d}$
Potenzielle Energie	
$U_{pot} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$	$U_{pot} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ mit $U_{pot} = 0$ für $p \perp E$

<i>Magnetismus</i>	<i>Elektrostatik</i>
Kraft auf Dipolmoment im homogenen Feld = 0 Kraft auf Dipolmoment im inhomogenen Feld	
<p>Stern-Gerlach-Versuch:</p>  <p>$\vec{F} = \vec{m} \text{ grad } B$;</p> <p>Diamagnetismus, induziertes \vec{m}</p> <p>Paramagnetismus, permanentes \vec{m} wird in B-Feld ausgerichtet</p> <p>Ferromagnetismus, permanentes \vec{m} ist ohne äußeres Feld der Festkörper ausgerichtet, Ausrichtung wegen WW zwischen \vec{m}</p>	 <p>$\vec{F} = F^+ + F^- = -q \vec{E}(\vec{r}) + q \vec{E}(\vec{r} + d \vec{r}) =$ $= q d \frac{d \vec{E}}{d r} = \vec{p} \text{ grad } E ;$</p> <p>Dielektrizität, induziertes \vec{p}</p> <p>Paraelektrizität, permanentes \vec{p} wird im E-Feld ausgerichtet</p> <p>Ferroelektrizität, dito</p>

5.1 Paramagnetismus

Wahrscheinlichkeit der Ausrichtung in einem äußeren Feld des permanenten Dipolmoments gegeben durch Brownsche Wärmebewegung, hier $U_{pot} \ll k_B T$.

$\propto e^{-\frac{U_{pot}}{k_B T}} \propto 1 - \frac{U_{pot}}{k_B T} + \dots$	$1 + \frac{p E \cos \varphi}{k_B T}$
--	--------------------------------------

<p>Gesamtmagnetisches Moment Volumen = Magnetisierung</p> $\vec{M} = \left(\frac{n}{6} \left(1 + \frac{m B \cos \varphi}{k_B T} \right) - \frac{n}{6} \left(1 - \frac{m B \cos \varphi}{k_B T} \right) \right) \cdot \vec{m} =$ $= \frac{n}{6} \frac{2 m B}{k_B T} \vec{m};$	<p>Gesamtelektrisches Moment = \vec{p} V</p> 
--	--

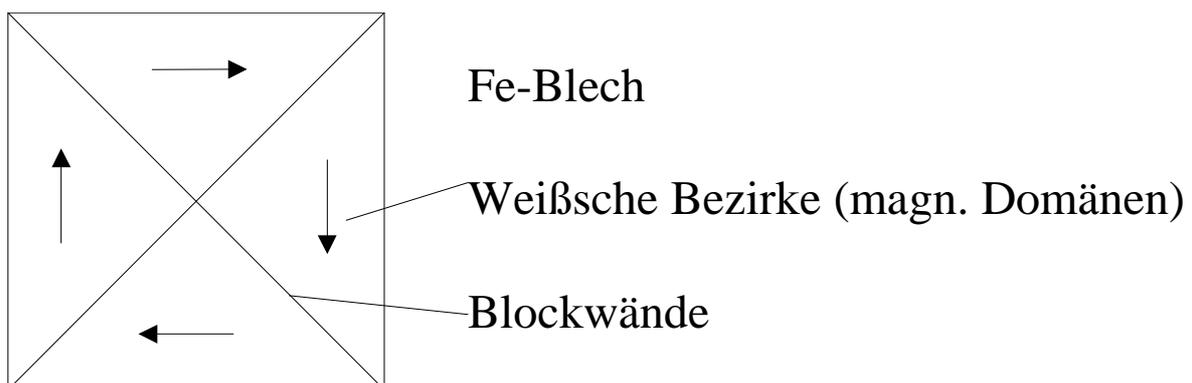
$$\vec{M} = \frac{n}{3} \frac{m^2 B}{k_B T}; \quad \vec{P} = \frac{n}{3} \frac{p^2 E}{k_B T};$$

$$\chi_m = \frac{\mu_0 M}{B} = \mu_0 \frac{n m^2}{3 k_B T}; \quad \chi_e = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{n p^2}{\epsilon_0 3 k_B T};$$

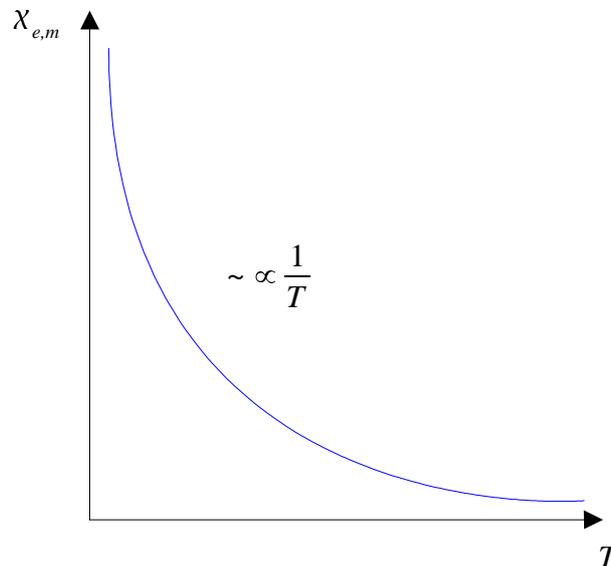
Temperaturabhängigkeit \equiv **Curie-Gesetz**

$\vec{M} = n \cdot \vec{m}$ **spontane Magnetisierung für Ferromagnete**

Spontane Magnetisierung wird zunächst makroskopisch (meistens) nicht von außen beobachtet. Makroskopisch ausgerichtete Domänen kompensieren sich gegenseitig.



Anlegen des äußeren B-Feldes lässt $\vec{M} \parallel \vec{B}$ auf Kosten der anderen Domäne anwachsen.

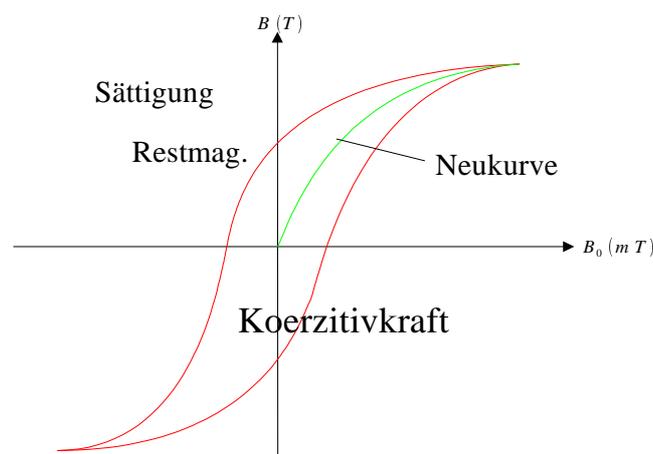


Dauermagnet: große Sättigungsmagnetisierung, große Koernitivkraft, große Hystereseschleife:
Hartmagnet (FeCoVCr, AlNiCr, CrCoFe, seltene-Erdmagnet Co??)

Trafokern: geringe Hysterese: Weichmagnete Fe_{1-x}Si ($x = 0,05-0,20$)

Temperaturabhängigkeit der Sättigungsmagnetisierung

- sowohl $M_s(T)$, als auch T_c sind Materialgrößen
- oberhalb von T_c ist Ferromagnet ein Paramagnet



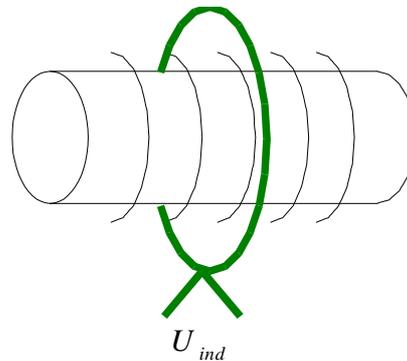
Stoff	T_c (K)	m (μ_B) pro Atom	Sättigungsmagnetisierung $\mu_0 A s$
Fe	1043	2,22	

Co	1388	1,72	
Ni	627	0,61	
Gd	292	7,63	
Dy	88	10,2	
EuO	63	6,8	

5.3 Feldgleichungen (für Dia-, Para-, Ferromagnetismus)

Materie (dia-, para-, ferromagnetisch) wird in Magnetspule eingebracht:

- homogenes Feld in Spule ohne Materie: $B_0 = \mu_0 n \cdot I$
- Magnetisierung der Materie und B_0 werden sich addieren
- Messung des „neuen“ B-Feldes

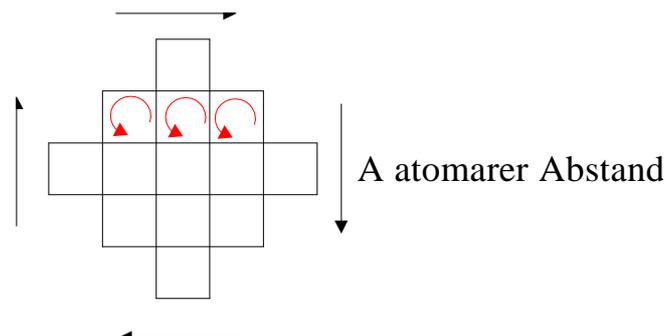


$$\int_0^{\infty} U_{ind} = \int_0^{-A} \frac{d B}{d t} = -A B$$

Feststellung:

- $B \gg B_0$ ferromagnetisches Material
- $B > B_0$ paramagnetisches Material
- $B < B_0$ diamagnetisches Material

Wegen axialem B_0 in Spule zeigen \vec{m}_{atomar} in B_0 , $m_{atomar} \hat{=} \text{Kreisstrom} \perp B$



$$\Rightarrow B_{\text{gesamt}} = \mu_0 n \cdot I + \mu_0 \frac{i \cdot a^2}{a^3};$$

i : atomarer Kreisstrom

$$\vec{B} = \underbrace{\mu_0 n \cdot I}_{B_0} + \underbrace{\mu_0 \frac{1}{a}}_{\mu_0 M} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M};$$

$$\vec{B} = \underbrace{\mu_0 n I}_{B_0} + \underbrace{\mu_0 \frac{i}{Q}}_{\mu_0 M} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}$$

$$B = \mu_0 (H + M) = \mu_r \mu_0 H = \mu_r B_0 \quad \text{mit } H = B_0 / \mu_0$$

$$M = \frac{(B - B_0)}{\mu_0} = \underbrace{(\mu_r - 1)}_{\chi_m} \frac{B_0}{\mu_0}$$

<i>Magnetismus + Materie</i>	<i>Elektrostatik + Materie</i>
$\oint_A \vec{A} = 0$ Quellenfreiheit	$\oint_A \vec{D} d\vec{A} = \int \rho dV$ Gaußscher Satz
$\oint_C \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 (I + i)$ mit $i = \oint \vec{M} d\vec{s}$ Ampère	$\oint_C \vec{D} d\vec{s} = 0$ Wirbelfreiheit

5.4 Diamagnetismus

Auch solche Stoffe, welche abgeschlossene Elektronenschalen haben, bzw. Bahndrehmoment und Gesamtspin = 0, zeigen Rückwirkung auf äußeres B_0 .

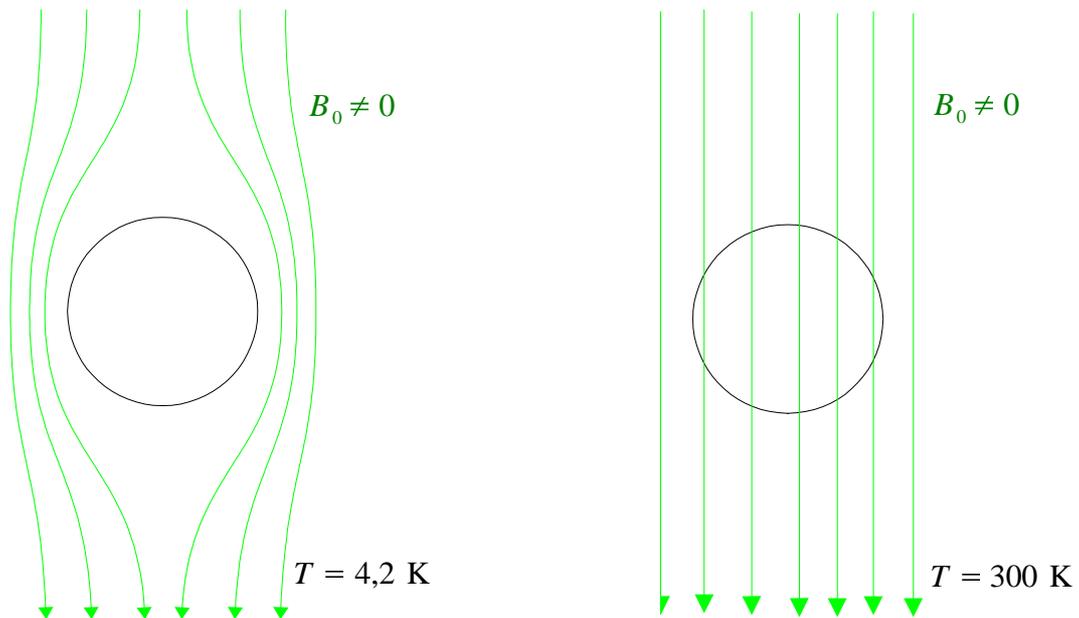
Grund: Elektronen reagieren auf äusseres Magnetfeld mit Präzession, die Präzession entspricht Kreisstrom, welcher B induziert. Lenzsche Regel \Rightarrow induziertes B-Feld ist B_0 entgegengesetzt.

$B < B_0$ für Diamagnetismus

$\chi_{\text{diamagn}} < 0$, ferner nicht temperaturabhängig

Diamagnetismus baut im Material \vec{M} auf, welches B_0 entgegengesetzt ist.

Idealer Diamagnetismus im Supraleiter



Idealer Diamagnetismus und Supraleitung bewirken, dass induziertes $\mu_0 \vec{M}$ exakt induziertes B_0 kompensieren.

Meissner-Effekt, Verdrängung des B-Feldes beim Übergang $T > T_C$.

C.6 Maxwellsche Gleichungen, elektromagnetische Wellen

6.1 Maxwellsche Gleichungen

	<i>Integralform</i>	<i>Operatorform in Materie</i>	<i>Operatorform im Vakuum</i>
Gaußscher Satz § 1.5 Ladungen = Quellen des E-Feldes	$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho \, dV$	$\text{div } \vec{E} = \rho \frac{(r)}{\epsilon_0}$ $\text{div } \vec{D} = \rho(r)$	$\text{div } \vec{E} = 0$
Quellenfreiheit des magn. Feldes § 4.1	$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$
Faradaysches Induktionsgesetz, § 4.7, zeitl. änderndes B-Feld verursacht elektr. Wirbelfeld	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Ampère-Maxwellsches Gesetz, § 4.1+§ 6.1, zeitl. Änderndes E-Feld verursacht magn. Wirbelfeld	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$ $= \mu_0 \int \left(j + \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) \cdot d\vec{A}$	$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ $\text{rot } \vec{M} = \frac{j \cdot \partial \vec{D}}{\partial t}$	$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Wieso Erweiterung des Ampèreschen Gesetzes?

Ladung auf Kondensatorplatte $q = A \cdot \epsilon_0 E$

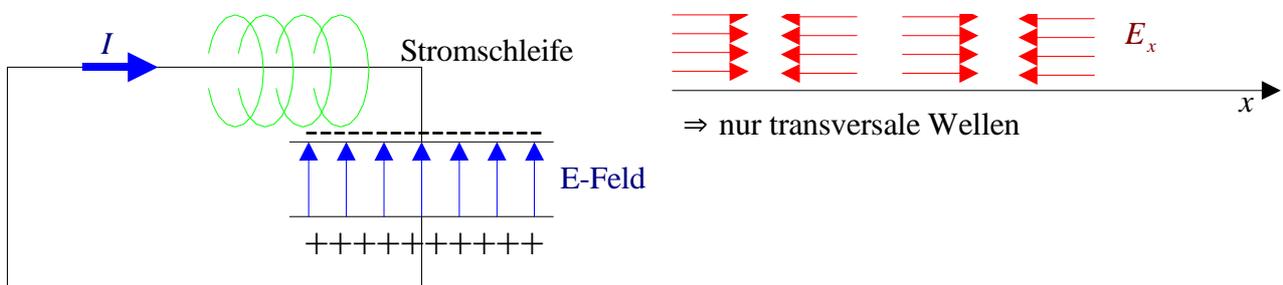
Strom

$$I = \frac{dq}{dt} = A \cdot \epsilon_0 \frac{dE}{dt}$$

verallgemeinerte Form $I = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$

6.2 Elektromagnetische Wellen im Vakuum

- Behauptung: in x-Richtung ausbreitende Welle ist Lösung der MG im Vakuum
- Feststellung: longitudinale Welle keine Lösung der MG



widerspricht 1. MG im Vakuum

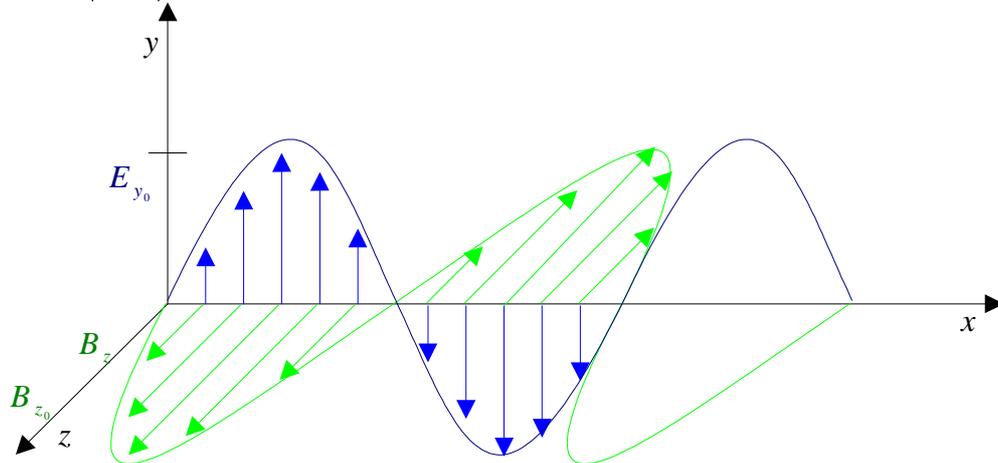
- bekannt: Definitionsgleichung der fortschreitenden Welle § A.10.4

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Differenzialgleichung 2. Ordnung mit $c = \lambda / t$

Wellengeschwindigkeit = Ausbreitungsgeschwindigkeit = Phasengeschwindigkeit
mit einer Lösung

$$E_y = E_{y0} \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$$



Entspricht dies einer Lösung der Maxwell'schen Gleichungen ?

3. MG angewandt auf x,y-Ebene

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_y(x+d x) \cdot d y - E_y(x) \cdot d y = \frac{\partial E_y}{\partial x} d x \cdot d y = \frac{\overbrace{-\partial B_z}^{B \perp A}}{\partial t} \overbrace{d x \cdot d y}^{d \vec{A}}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{-\partial B_z}{\partial t} \quad (1) \quad B_x = B_y = 0 \Rightarrow \text{B-Feld senkrecht zu E-Feld } B_z \perp E_y$$

3. MG angewandt auf z,x Ebene

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B_z(x) d z - B_z(x+d x) d z = \frac{-\partial B_x}{\partial x} d x d z = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial B_x}{\partial t} \overbrace{d x d z}^{d \vec{A}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (2)$$

Differenzieren von (1) nach x

Differenzieren von (2) nach t

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad \text{Wellengleichung für } \vec{E} \text{ q.e.d.}$$

Umgekehrtes Differenzieren von (1) und (2)

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \quad \text{Wellengleichung für } \vec{B} \text{ q.e.d.}$$

Vergleich mit Wellengleichung der Mechanik:

$$1/c^2 = \epsilon_0 \mu_0$$

Die elektromagnetische Welle propagiert mit Lichtgeschwindigkeit

B_z und E_y sind in Phase zueinander

Lösung in (1) einsetzen

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = E_{y0} \frac{\omega}{c} \cos \left(t - \frac{x}{c} \right) = \frac{-\partial B_z}{\partial t}$$

$$B_z = - \int d B_z = \int E \mu_0 \frac{\omega}{c} \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) d t = E \frac{\mu_0}{c} \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

$$\frac{E_y}{B_z} = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

6.3 Intensität der elektromagnetischen Welle, der Poynting Vektor

Elektrische Energiedichte:

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 ;$$

Magnetische Energiedichte:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2 ; \Rightarrow$$

$$\frac{W}{V} = w = \frac{\epsilon_0}{2} E_y^2 + \frac{1}{2 \mu_0} \underbrace{B_z^2}_{B_z^2 = \epsilon_0 \mu_0 E_y^2} = \epsilon_0 E_y^2 = \frac{1}{\mu_0} B_z^2$$

Energiedichte

wegen propagierender Welle \rightarrow **Energiestromdichte** $S = w c$ entspricht pro Zeiteinheit durch Einheitsfläche \perp durchtretende Energie.

Vektorielle Schreibweise:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \text{Poynting Vektor}$$

$$\left(\frac{1}{\mu_0} = c^2 E_y ; B : \frac{E_y}{c} \right)$$

Da $S \propto B_z^2 \propto E_y^2$ variiert S mit doppelter Frequenz wie E_y oder B_z .

6.4 Elektromagnetische Welle in Materie

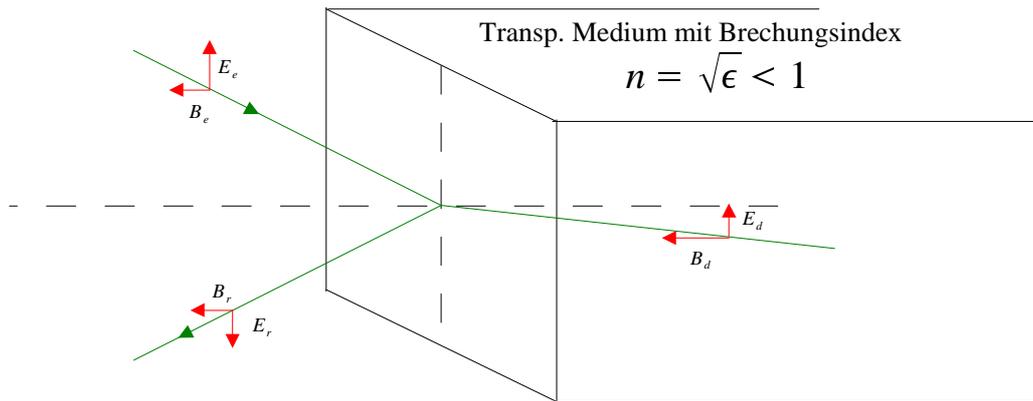
$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_0 \rightarrow \epsilon \epsilon_0 \\ \mu_0 \rightarrow \mu_r \mu_0 \end{array} \right\} \frac{E_y}{B_z} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu_r \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu_r}} = u = \frac{c}{n}$$

(n : Brechungsindex)

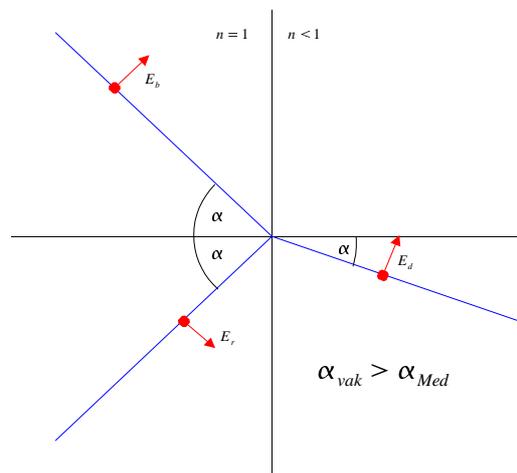
\Rightarrow Ausbreitungsgeschwindigkeit $v < c$

\Rightarrow Brechungsindex $n = \sqrt{\epsilon \mu_r}$ für sichtbares Licht $\approx \sqrt{\epsilon}$, da außer für Ferromagneten $\mu_r \approx 1$.

6.5 Reflexion einer elektromagnetischen Welle



in Streu(Reflexions)ebene



Brechung zum dichteren Medium hin: $\theta_{\text{Vakuum}} < \theta_{n > 1}$.

$$\frac{E}{B} = c \text{ im Vakuum}$$

$$\frac{E}{B} = \frac{c}{n} \text{ im Medium}$$

Randbedingungen:

- Stetigkeit des tangentialen \vec{E} und $\vec{H} = 1/(\mu_r \mu_0) \vec{B}$ -Feldes beim Übergang
- Stetigkeit der Normalkomponente von $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 E$ und \vec{B} Feldes beim Übergang
von Vakuum \rightarrow Medium erfordert reflektierte Welle

Es muss gelten:

$$B_d = B_e + B_r \quad (1); \quad E_d = E_e - E_r;$$

ferner: $B = E/c \cdot n$;

$$(1) \Rightarrow \frac{E_d}{c} n = \frac{E_e}{c} + \frac{E_r}{c} \quad (1')$$

bezieht sich auf Amplituden: (2) in (1') einsetzen:

$$\frac{E_r}{E_e} = \frac{n-1}{n+1} \equiv R \quad \text{Reflexionskoeffizient}$$

$$\frac{E_d}{E_e} = \frac{2}{n+1} \equiv D = 1 - R \quad \text{Transmissionskoeffizient}$$

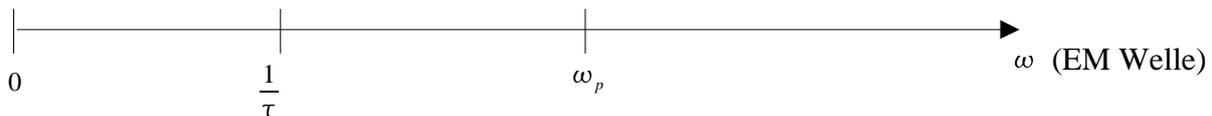
für Intensitäten (= Amplituden²) gilt:

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv R^2 \\ d \equiv n \cdot D^2 \end{array} \right\} \text{ so dass gilt: } \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 + n \left(\frac{2}{n+1} \right)^2 \equiv 1 .$$

Sinnvoll wegen Energieerhaltung.

6.6 Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in Metallen, Skinneffekt

zwei Grenzfrequenzen bestimmen Beweglichkeit von e^- in Metallen



$$- \quad \omega < \frac{1}{\tau} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{\sigma_0 m^-}{n^- e^2} \quad (\S 3 \text{ und } 3.1, \text{ Beweglichkeit von Ladungsträgern})$$

ohmsches Gesetz gilt, $\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$, Strom durch stationäre Driftgeschwindigkeit bestimmt, viele Stöße während einer Periode der EM-Welle

$$\left. \frac{1}{\tau} \right|_{\text{Cu } 300 \text{ K}} \approx 3 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$$

Bis zu dieser Frequenz ist Wechselstromleitfähigkeit = Gleichstromleitfähigkeit

- $\omega = \omega_p$ mit $\omega_p = (n e^2) / (\epsilon_0 m_e) \equiv$ Plasmafrequenz, e^- bewegen sich als freie Elektronen, da Periode T der EM-Welle wesentlich kürzer als mittlere Stoßzeit τ , $\omega_p =$ Eigenfrequenz (Resonanzfrequenz) der freien erzwungenen Schwingung der Leitungselektronen.
- Diese Grenzfrequenzen gibt es auch für andere leitende Medien, zum Beispiel Ionosphäre

$$\omega < \frac{1}{2} \quad \text{normaler Skinneffekt}$$

3. M.G.

$$\oint_c \vec{E} \, d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \, d\vec{A}$$

mit gleichem Lösungsansatz wie in § 6.2

$$E_y = E_{y_0} \sin \omega \left(t - \frac{t}{2} \right)$$

$$(1) \quad \frac{d E_y}{d x} = - \frac{d B_z}{d t}$$

4. M.G.

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) \cdot d\vec{A};$$

$\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$; Leitungsstromdichte ist dominant gegenüber Verschiebungsstromdichte $\epsilon_0 (d\vec{E}/dt)$

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \sigma_0 \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad \text{wieder in Analogie zu § 6.2}$$

$$(2) \quad \frac{dB_z}{dx} = -\mu_0 \sigma_0 E_y$$

(1) nach x differenzieren, (2) nach t differenzieren:

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} = \mu_0 \sigma_0 \frac{d E_y}{dt}$$

Achtung, keine ungedämpfte Wellengleichung wie in § 6.2

Lösungsansatz: gedämpfte Welle

$$E_y = E_{y_0} e^{-\alpha x} \sin \omega \left(t - \frac{1}{\omega} x \right)$$

Einsetzen in Differenzialgleichung, Koeffizientenvergleich

$$\alpha = k = \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma_0 \omega}{2}}$$

\Rightarrow mittlere Eindringtiefe der EM-Welle $= 1/\alpha$. Je größer ω umso kleiner $1/\alpha$.

$$\frac{1}{\alpha} \Big|_{\text{Cu}} = \begin{cases} \text{cm für 100 Hz} \\ 0,1 \mu \text{ m für } 10^{12} \text{ Hz} \end{cases}$$

selbst gute Leiter haben für Hochfrequenz ohmschen Widerstand wegen Skinneffekt

$\frac{1}{\tau} < \omega < \omega_p$ **anomaler Skinneffekt**, Elektronen bewegen sich frei wie Plasma

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (\text{ohne Beweis, Herleitung z.B. Physik II, S. 86})$$

Betrachten jetzt Metall wie Dielektrika, Verschiebungsstromdichte entscheidet im 4. M.G.

Achtung: $\epsilon < 1$

$$4. \text{ M.G. } \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{s} = \epsilon \epsilon_0 \mu_0 \int_A \frac{d\vec{E}}{dt} \cdot d\vec{A}$$

Lösung in Analogie zu § 6.2

$$\frac{d E_y}{dx^2} = \epsilon \epsilon_0 \mu_0 \frac{d^2 E_y}{dt^2}$$

mit Lösungsansatz für **stehende** Welle

$$E_y = E_{y_0} e^{-\alpha x} \sin \omega t$$

Einsetzen:

$$\alpha^2 = - \underbrace{\varepsilon}_{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \frac{\omega^2}{c^2} = - \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \quad \omega_p \gg \omega \quad \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \approx \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

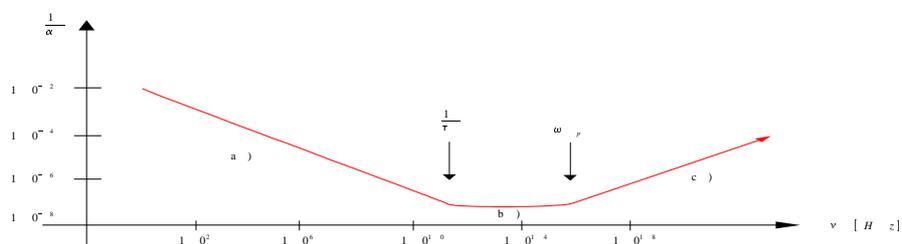
Für negatives ε erhalten wir reellen Eindringkoeffizienten $1/\alpha = c/\omega_p = \gamma \lambda/2\pi \quad v_p \approx \lambda_p$

Eindringtiefe $1/\alpha \approx \lambda_p$, in Metallen ca. $4 \cdot 10^{-6} \text{ cm} = 50 \text{ nm}$ \rightarrow entspricht einer Reflexion

c) $\omega > \omega_p$ Durchlässigkeit von Metallen bei hohen Frequenzen

Jetzt $\varepsilon > 0$, Wellengleichung führt zu ausbreitender Welle, Metalle werden bei hohen Frequenzen wieder transparent! Bei Alkalimetallen bereits im ultravioletten Spektralbereich.

Zusammenfassung:



6.7 Strahlung eines oszillierenden Dipols