

Ein Skript der Vorlesung

Experimentalphysik 2
Relativitätstheorie

(studentische Mitschrift der Vorlesung)

Prof. Winfried Petry
TUM München
2. Semester, SS 2000

Datum: 01.03.2001

von Michael Wack, Christoph Moder, Manuel Staebel
(©2000)
<http://www.skriptweb.de>

Hinweise (z.B. auf Fehler) bitte per E-Mail an uns: mail@skriptweb.de – Vielen Dank.

Inhaltsverzeichnis

1. Vorbetrachtungen	3
Literatur:.....	3
2. Galilei-Transformation	4
3. Spezielle Relativitätstheorie	5
4. Die Lorentztransformation	7
4.1 Regelung von Uhren	8
4.2 Zeitdilatation	9
4.3 Längenkontraktion	16
4.4 Additionstheorem der Geschwindigkeiten, Lorentz-Transformation von Geschwindigkeiten.....	16
5. Invarianz der Maxwellgleichungen (Elektrodynamik) gegenüber Lorentz-Transformation ..	11
6. Relativistische Erweiterung der Newtonschen Mechanik	12
Masse-Energie-Äquivalenz.....	12
7. Allgemeine Relativitätstheorie	14
Einsteinsche Feldgleichungen	14

1.Vorbetrachtungen

Literatur:

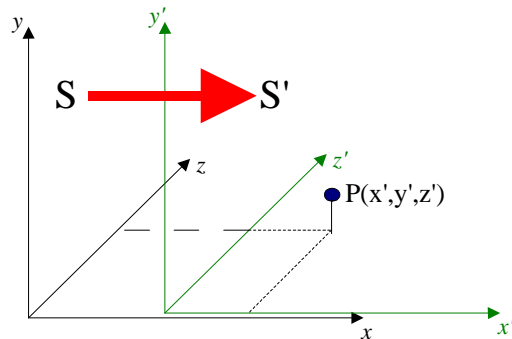
- Feynman:LecturesonPhysics,Bd.1/2
- Tipler:Physik
- Gerthsen:Physik
- Grimsehl;Band3(DarstellungderVersuchsbeschreibungenÄtherwind)
- Stephani:AllgemeineRelativitätstheorie(mathematischanspruchsvoll!)
- Simonyi:KulturgeschichtederPhysik

2. Galilei-Transformation

Newton: Relativitätsprinzip

Inertialsysteme (*inertia*: Trägheit):

- geradlinig, gleichförmig
- physikalische Gesetze haben dieselbe Form



$$\begin{aligned}x' &= x - u t \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= t\end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen von Newton:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = \frac{d \vec{p}}{d t}$$

sind „Galilei-invariant“, $\vec{a} = \vec{a}'$.

$$v'_x = \frac{d x'}{d t'} = v_x - u; \quad a'_x = \frac{d v'_x}{d t} = a_x;$$

$$v'_y = \frac{d y'}{d t'} = v_y; \quad a'_y = \frac{d v'_y}{d t} = a_y;$$

$$v'_z = \frac{d z'}{d t'} = v_z; \quad a'_z = \frac{d v'_z}{d t} = a_z;$$

Implizite Voraussetzungen :

- Raum ist absolut, unabhängig vom „Inhalt“
- Zeit ist absolut, „verfließt“ unabhängig vom Bewegungszustand des Systems

3. Spezielle Relativitätstheorie

Albert Einstein 1905 (Allgemeine Relativitätstheorie: 1915)

Probleme:

- Maxwell'sche Gleichungen enthalten Lichtgeschwindigkeit c , deren Deutung auf Schwierigkeiten stößt:
 - Das Fortpflanzungsmedium für elektromagnetische Wellen, der Äther, hat bizarre Eigenschaften (Elastizität: sehr hoch wegen hoher Lichtgeschwindigkeit; Dichte: sehr gering, weil Erde und Planeten auf ihren Bahnen nicht gebremst werden)
 - Ein ausgezeichnetes (gegen Äther ruhendes) Bezugssystem sollte zu finden sein. → Suche nach geeigneten Experimenten (Michelson-Morley 1887).
 - „Kritische Geschwindigkeit“ der Elektrodynamik (identisch mit c) führt auf Widersprüche:
 - \vec{E} aus Coulombgesetz und \vec{H} aus dem Ampere-Gesetz: $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$.
- Maxwell-Gleichungen sind nicht Galilei-invariant:

Plausibilitätsbetrachtung:

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0;$$

$$(\Delta = \nabla^2)$$

⇒ Galilei-Transformation: $x = x' + u t'$; $x' = x - u t$; $t = t'$;

$$E_x(x, t)$$

Ortsableitung von $E_x(x) = E_x(x' + u t')$:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial x'};$$

Änderung von x' ist identisch mit der von x

$$\Rightarrow \Delta E_x = \Delta' E_x$$

Zeitableitung von $E_x(x, t) = E_x(x' + u t', t')$:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial x'} \underbrace{\frac{\partial x'}{\partial t}}_{-u} + \frac{\partial E_x}{\partial t'} \underbrace{\frac{\partial t'}{\partial t}}_1 = -u \frac{\partial E_x}{\partial x'} + \frac{\partial E_x}{\partial t'};$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -u \nabla' E_x + \frac{\partial E_x}{\partial t'};$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t'} - u \nabla' \right)^2 \vec{E};$$

⇒ Maxwell-Gleichung nicht Form-invariant gegenüber Galilei-Transformation!

Lösung der Widersprüche:

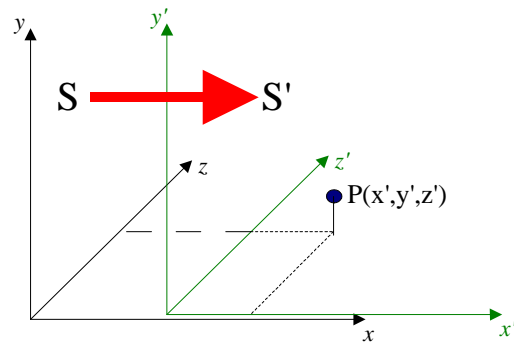
- a) Maxwell-Gleichungen sind falsch (allerdings: sie beschreiben die Elektrodynamik umfassend)
- b) Relativitätsprinzip ist ungültig \Rightarrow es gibt ein ausgezeichnetes Inertialsystem
- c) Galilei-Transformation stimmt nicht

Naheliegender: b)

Albert Abraham Michelson (1852 - 1931), Edward Williams Morley (1838 - 1923)

Ergebnis: kein Ätherwind (das Michelson-Morley-Interferometer hätte beim Drehen etwas anzeigen müssen)

4. Die Lorentztransformation



- 1) Alle Inertialsysteme sind gleichwertig (bezüglich der Formulierung der Naturgesetze).
- 2) Die Lichtgeschwindigkeit hat in jedem Inertialsystem den gleichen Wert c (Anschauung!).
- 3) Der Übergang von einem System in ein anderes soll linear sein.

Ergeltes: $y = y'$ und $z = z'$:

3) Linearität: $x' = \alpha (x - v t)$ (I)

1) Relativitätsprinzip: $x = \alpha (x' + v t')$ (II)

2) Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: $x = c t$ (III), $x' = c t'$ (IV);

Ortstransformation:

(III) und (IV) in (I): $c t' = \alpha (c t - v t) \Rightarrow$

$$t' = \frac{\alpha}{c} (c t - v t) = \alpha \left(1 - \frac{v}{c} \right) t;$$

(III) und (IV) in (II): $c t = \alpha (c t' + v t') \Rightarrow$

$$t = \alpha \left(1 + \frac{v}{c} \right) t';$$

Test:

$$t = \alpha \left(1 + \frac{v}{c} \right) \alpha \left(1 - \frac{v}{c} \right) t;$$

muss 1 sein, da $t = t$ gelten muss

$$\Rightarrow \alpha^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 1;$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ mit } \beta = \frac{v}{c}$$

Zeittransformation:

(I) und (IV) gleichsetzen:

$$t' = \frac{\alpha}{c} (x - v t) = \frac{\frac{x}{c} - \frac{v}{c} t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$x' = \frac{x - v t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$y' = y; \quad z' = z;$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$x = \frac{x' + v t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$y = y'; \quad z = z';$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

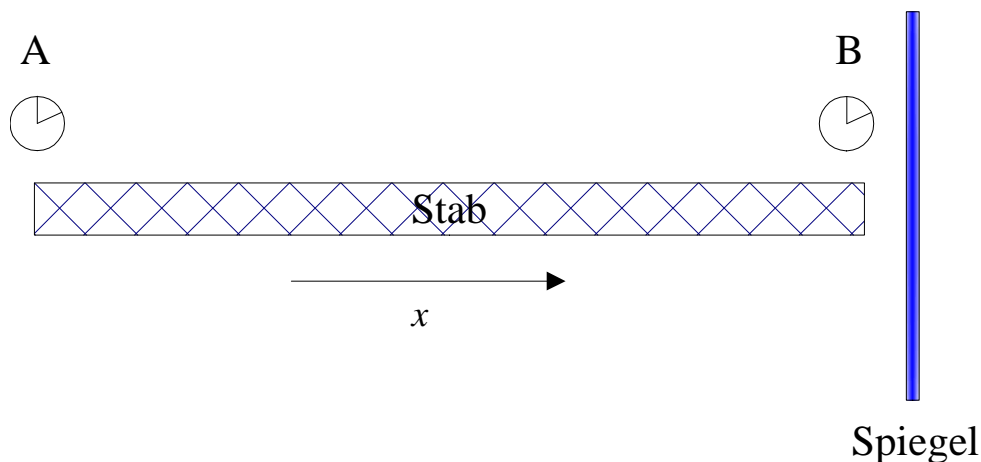
Neues Problem: Newtonsche Gleichungen sind nicht invariant gegenüber Lorentz-Transformation

klassischer Grenzfall: $v \ll c \Rightarrow v/c = \beta \approx 0 \Rightarrow$ Lorentz-Transformation entspricht Galilei-Transformation: $x' = x - v t$, $t' = t$.

Konsequenzen der Lorentztransformation:

4.1 Regelung von Uhren

richtige Zeiten, t , t' in Σ (ruhend System) und Σ' (bewegtes System)



- a) ruhend, Σ : zur Zeit t_0 von A emittierter Lichtstrahl wird zur Zeit t_1 am Spiegel reflektiert und zur Zeit t_2 bei A gesehen.
 $\Rightarrow t_1 = (t_0 + t_2)/2$;
- b) bewegtes System, Σ' , $v = v_x$:
 Einsteinsches Postulat: Auch im System Σ' breitet sich das Licht isotrop aus, also auf Hin- und Rückweg gleiche Geschwindigkeit c .
 $\Rightarrow t'_1 = (t'_0 + t'_2)/2$;

Konstanz von c in Σ und Σ' ergibt gleiche Regelung der Uhren in Σ und Σ' . Festgelegte Zeiten sind untereinander gleichberechtigt.
 Keine ausgezeichnete Zeit!

4.2 Zeitdilatation

a) 2 Ereignisse in Σ am Ort $x = 0$

b) Zeitdifferenz im bewegten System

$$t'_2 = \frac{t_2}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad t'_1 = \frac{t_1}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}};$$

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}} > \Delta t;$$

Objektbewegtsich mit

$$\vec{w}' = \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix}$$

in Σ' , Σ' bewegt sich gegen Σ mit $\vec{v} = v_x$ in x-Richtung.

Laut Lorentz-Transformation (LT) gilt:

$$x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1 + v(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1 + v(x'_2 - x'_1)/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

$$w_x = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \dots = \frac{w'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} w'_x}$$

$$y_2 - y_1 = y'_2 - y'_1, \quad t_2 - t_1 = \text{s.o.}$$

$$w_y = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = \dots = \frac{w'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2} w'_x}$$

$$w_z = \dots \text{ dito}$$

Rücktransformation:

$$\begin{aligned}
 w'_x &= \frac{w_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} w_x} ; \\
 w'_y &= \frac{w_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2} w_x} ; \\
 w'_z &= \frac{w_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2} w_x}
 \end{aligned}$$

1) Gewehr kugel im Zug in Richtung Fahrtgeschwindigkeit wird mit w'_x abgeschossen:

$$w_x = \frac{w'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} w'_x} \Rightarrow [...]$$

2) [...]

3) [...]

5. Invarianz der Maxwellgleichungen (Elektrodynamik) gegenüber Lorentz-Transformation

Spezielle Relativitätstheorie als Axiom:

Alle Naturgesetze müssen so beschaffen sein, dass sie für Systeme, die relativ zueinander in gleichförmiger Translationsgeschwindigkeit aufweisen, die gleiche Gestalt besitzen.

$$a) \quad \Sigma \quad \frac{-\partial B}{\partial t} = \text{rot } \vec{E} \quad (\text{Faraday})$$

$$b) \quad \Sigma' : \quad \frac{-\partial B_x}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial y'} \left[\alpha (E_z + v B_y) \right] - \frac{\partial}{\partial z'} \left[\alpha (E_y - v B_z) \right];$$

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial y'} \left[\alpha \left(B_z - \frac{\beta}{c} E_x \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z}$$

[...]

Die Gleichungen im Σ' -System sind analog zu den Gleichungen in Σ , wenn:

$$E'_{x'} = E_x; \quad E'_{y'} = \alpha (E_y - v B_z); \quad E'_{z'} = \alpha (E_z + v B_y);$$

$$B'_{x'} = B_x; \quad B'_{y'} = \alpha \left(B_y + \frac{\beta}{c} E_z \right); \quad B'_{z'} = \alpha \left(B_z - \frac{\beta}{c} E_y \right);$$

$$-\frac{\partial B'_{x'}}{\partial t'} = \frac{\partial E'_{z'}}{\partial y'} - \frac{\partial E'_{y'}}{\partial z'};$$

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E'_{x'}}{\partial t'} = \frac{\partial B'_{z'}}{\partial y'} - \frac{\partial B'_{y'}}{\partial z'};$$

Maxwellgleichungen sind invariant gegenüber Lorentz-Transformation. Die Charakterisierung elektromagnetischer Felder als rein elektrisch oder magnetisch gilt nicht absolut, sondern hängt vom Bezugssystem des Beobachters ab.

6. Relativistische Erweiterung der Newtonschen Mechanik

Aus axiomatischer Formulierung der speziellen Relativitätstheorie ist Erweiterung der Newtonschen Mechanik notwendig.

$$F_{\text{Mass}} = \frac{d}{dt} (m_0 \vec{v}) = m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = m_0 \vec{b};$$

Jetzt: Ersetzung von $m_0 \vec{v} \rightarrow \alpha m_0 \vec{v}$ (klassischer und relativistischer Impuls)

$$\Rightarrow F_{\text{rel}} = \frac{d}{dt} \alpha m_0 \vec{v} = \frac{d}{dt} m \vec{v}; \quad m = \alpha \cdot m_0; \quad m_0: \text{Ruhemasse, Masse bei } v = 0$$

[...]

Masse-Energie-Äquivalenz

Verrichtung von Arbeit entspricht Änderung von kinetischer Energie

$$\text{klassisch: } dW_{\text{Arbeit}} = dW_{\text{kin}} = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} dt = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

$$\text{relativistisch: } \vec{v} \cdot \vec{F} = \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

etwas Mathe:

$$\vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 v \left[\frac{\frac{d\vec{v}}{dt}}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\beta^2 \frac{d\vec{v}}{dt}}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = m_0 \vec{v} \cdot \frac{\frac{d\vec{v}}{dt}}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0 c^2}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

[...]

Gesamtenergie

$$W = W_{\text{kin}} + W_0 = m c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2}$$

Herleitung für speziellen Fall der beschleunigten Masse. Einstein forderte axiomatisch, dass diese Gleichung allgemeingilt.

Jeder Energie kommt eine Masse $m = E/c^2$ zu, und jeder Masse kommt eine Energie zu. Masse und Energie sind äquivalent.

Beispiele:

1) Cu0 K, 1200 K \rightarrow höhere Wärmeenergie \rightarrow schwerer

2) 1 Gramm Masse = $2,5 \cdot 10^6$ kWh

- 3) Sonne strahlt Energie ab $\rightarrow 2,5 \cdot 10^{11}$ kg/min Masse verbraucht; bei Gesamtmasse 10^{30} kg
 \Rightarrow Lebensdauer der Sonne $7,8 \cdot 10^{12}$ a
- 4) $\left. \begin{array}{l} {}^4\text{He} \quad 4 \text{ Nukleone gebunden} \\ 2 \text{ Protonen und 2 Neutronen einzeln} \end{array} \right\}$ relativer Massenunterschied $\frac{\Delta M}{m_{\text{He}}} \sim 7,6 \cdot 10^{-3}$
 \Rightarrow Kernenergie pro Gramm ${}^4\text{He}$: $2 \cdot 10^5$ kWh
- 5) materielle Teilchen haben bei $v = c$ $m = \infty$
 \Rightarrow materielle Teilchen erreichen nie Lichtgeschwindigkeit

7. Allgemeine Relativitätstheorie

Bis jetzt: Nur physikalische Größen von geradlinig und gleichförmig gegeneinander bewegten Systemen betrachtet. Keine Beschleunigung der Systeme gegeneinander.

Neu (Einstein): Die Beschreibung physikalischer Erscheinungen in Gravitationsfeldern ist der Beschreibung in beschleunigten Bezugssystemen gleichwertig. Alle gegeneinander beschleunigten Bezugssysteme sind zur Beschreibung des Naturgeschehens gleichberechtigt. Axiom der Allgemeinen Relativitätstheorie:

Äquivalenz von Schwerfeld und beschleunigtem System.

Eine einheitliche, durch ein homogenes Gravitationsfeld sämtlicher Massen erteilte Beschleunigung kann durch Wahl eines geeigneten beschleunigten Bezugssystems zum Verschwinden gebracht werden.

Homogenes Schwerfeld kann wegtransformiert werden.

Mathematik hierzu → Vierervektor im 4-dimensionalen Raum-Zeit

$$\begin{aligned}x_1 &= x; \\x_2 &= y; \\x_3 &= z; \\x_4 &= i c t;\end{aligned}$$

$$\text{Linienelement } ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.$$

Wir erfahren, dass ds Lorentz-invariant ist

Einsteinsche Feldgleichungen

$$\left(\begin{array}{l} \text{Größen, welche lokal die} \\ \text{geometrische Struktur der} \\ \text{4-dimensionalen Raumzeit bestimmen} \end{array} \right) = \frac{8 \pi \gamma}{c^2} \left(\begin{array}{l} \text{Größen, welche lokal die} \\ \text{Physik (ohne Gravitation)} \\ \text{vollständig bestimmen} \end{array} \right)$$

Konsequenzen/Experimentelle Bestätigungen:

1) Gravitationsrotverschiebung

aus $r = \infty$ beschleunigter Masse hat Energie

$$E_{kin} = \gamma \frac{m_1 m}{r} = \frac{m}{2} v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \gamma m}{r}}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t}{1 - (2 \gamma)/c^2} \approx \Delta t \left(1 + \frac{\varphi}{c^2} \right)$$

mit

$$\varphi = \frac{\gamma m}{r} \Rightarrow \gamma' = \frac{\gamma}{1 + \varphi/c^2}$$

Die Uhr geht hier langsamer, deshalb Frequenzverschiebung. Nachweis im Experiment von Pound+Rebka

Verglichen werden Kernanregungen bei $r_0 = 0$ und $r_1 = 23 \text{ m} \approx 73$ -fach mit Hilfe des Mößbauereffekts

Energieschärfedieser γ -Strahlung von 14,4 keV

$$= \frac{\Delta E}{E} \propto 10^{-13}$$

$$\gamma_1'(r_0 = 0) - \gamma_2'(r_1 = 23 \text{ m}) \approx 2 \cdot 10^{-15}$$

2) Schwarze Löcher :

von vorher

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - (2\varphi)/c^2}} \text{ mit } \varphi = \frac{\gamma m}{r}$$

mit $\varphi_{\text{Schwarzschild}} = c^2/2$ gilt: $\Delta t' = \infty$

$$\frac{c^2}{2} = \frac{\gamma m}{r} \Rightarrow r_{\text{Schwarzschild}} = \frac{2 \gamma m}{c^2};$$

$r < r_{\text{Schwarzschild}} \Rightarrow$ Licht kann nicht mehr dem Gravitationsfeld entweichen

$r_{\text{Schwarzschild}}(\text{Erde}) = 10 \text{ m};$

$r_{\text{Schwarzschild}}(\text{Sonne}) = 3 \text{ km};$

Bei Neutronensternen ist $r_{\text{neutr. Stern}} - r_{\text{Schwarzschild}}$ denkbar. Mit $\Delta t' = \infty$ wird $\gamma' = 0 \Rightarrow$ Licht kann nicht entweichen

3) Lichtablenkung im Gravitationsfeld, Gravitationslinse :

ähnliche Wirkung wie Linse

$$\theta = \frac{4 \gamma M}{b c^2} \text{ Ablenkungswinkel (ohne Herleitung)}$$

Beobachtung von Gravitationslinsen

Gravitationswellen:

Lösung der Feldgleichungen mit Wellencharakter, breiten sich mit c aus. Analog zur elektromagnetischen Strahlung Entwicklung des Gravitationsstrahlungsfeldes in Multipole. Wird nur von beschleunigten Massen emittiert. Aber: Monopole, Dipole verboten, erst Quadrupole erlaubt.

$$S_{\text{Strahlungsleistung}} = \frac{\gamma}{5 c^5} \left(\frac{d^3}{d t^3} \vec{Q} \right)^2 \text{ (also sehr, sehr klein)}$$

Eine Zeitdifferenz erscheint vom bewegten System aus um den Faktor

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

vergrößert oder dem bewegten Beobachter scheint eine stehende Uhr langsamer zu gehen.

Beispiel:

- μ -Mesonen (Myonen) entstehen auf Grund von Wechselwirkung der kosmischen Strahlung mit Erdatmosphäre in einer Höhe von 38 km; $m_\mu \approx 280 m_e$
- Lebensdauer im ruhenden System (Myon selbst) $\tau_\mu = 22 \cdot 10^{-6}$ s
- Geschwindigkeit der Myonen $\sim c$, weil hochenergetisch ~ 5 GeV; präzise: $\beta = 0,9998$.

$$\Rightarrow t_{\text{zur Erde}} \approx \frac{38}{300000} = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

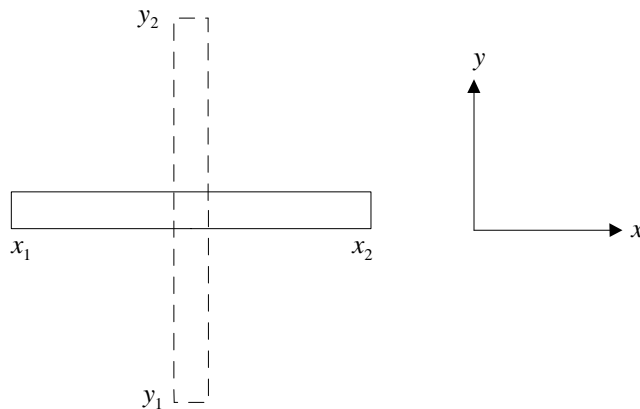
$$\Rightarrow t_{\text{zur Erde}} \gg \tau_{\mu, \text{Ruhesystem}}$$

$\Rightarrow \mu$ -Meson auf Erdenicht beobachtbar?

- relativistische Korrekturen:

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{2,2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-2}} = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

\Rightarrow das μ -Meson kann man sehr wohl auf der Erde beobachten!

4.3 Längenkontraktion

$$\Sigma' \quad v = v_x$$

[...]

4.4 Additionstheorem der Geschwindigkeiten, Lorentz-Transformation von Geschwindigkeiten

klassische Mechanik: vektorielle Addition; relativistisch?