Zusammenfassung

Theoretische Physik I

nach dem Buch
„Mechanik, Lehrbuch zur Theoretischen Physik I“
von Torsten Fließbach, 3. Auflage, Spektrum Verlag

Angelehnt an die Vorlesung von
Prof. Peter Vogl
TU München
3. Semester, WS 2001

Datum: 07.09.01

von Michael Wack und Christoph Moder

http://www.skriptweb.de

Hinweise (z.B. auf Fehler) bitte per eMail an uns: mail@skriptweb.de − Vielen Dank.

Inhaltsverzeichnis

Elementare Newtonsche Mechanik

Euklidischer und gekrümmter Raum

Ein kartesisches Koordinatensystem existiert nur im **euklidischen** = **ebener Raum**. Der Gegensatz ist der **gekrümmter Raum**, in dem folglich keine kartesischen Koordinaten möglich sind (Beispiel: zweidimensionaler Raum der Kugeloberfläche).
Die Verwendung von **gekrümmten Koordinaten** (z.B. Kugelkoordinaten) in einem euklidischen Raum ändert nichts an seiner Ebenheit.

Betrachtet man Lichtstrahlen als Geraden in einem allgemeinen Raum, so wird dieser Raum durch Gravitationsfelder gekrümmt. Da dieser Effekt allgemeinen recht klein ist, kann man lokal trotzdem kartesische Koordinaten verwenden.

Darstellung des Ortsvektors

$$\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z \quad \vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\vec{R}$ heißt Darstellung von $\vec{r}$ bezüglich der Basis $\vec{e}_{x,}\ \vec{e}_{y,}\ \vec{e}_z$. Ändert man die Basis, so erhält man zum gleichen Vektor $\vec{r}$ eine andere Darstellung $\vec{R}$.

Übliche **Darstellungen** sind:
Parameterdarstellung: $x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda), t(\lambda)$
Kartesische Koordinaten: $x(t), y(t), z(t)$
Polarkoordinaten: $\rho(t), \varphi(t), z(t)$
Kugelkoordinaten: $r(t), \theta(t), \phi(t)$

Geschwindigkeit und Beschleunigung

Sind als die erste bzw. zweite Zeitableitung des Ortsvektors definiert.

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t} = \lim_{t' \to t} \frac{\vec{r}(t) - r(t')}{t - t'} = \dot{x}(t)\,\vec{e}_x + \dot{y}(t)\,\vec{e}_y + \dot{z}(t)\,\vec{e}_z$$

$$a(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t)\,\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\,\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\,\vec{e}_z$$

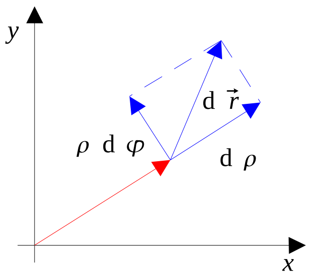
Die Ableitungen sind nur in diesem Fall so einfach, da die Basisvektoren nicht von der Zeit abhängen. Bei Verwendung von krummlinigen Koordinaten muss die Ortsabhängigkeit und damit bei bewegten Teilchen auch die Zeitabhängigkeit der Basisvektoren berücksichtigt werden.

Für Polarkoordinaten gilt: $x = \rho \cos\varphi\,;\ y = \rho \sin\varphi$

$$\mathrm{d}\,\vec{r} = \mathrm{d}\,x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}\,y\,\vec{e}_y = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\,\rho + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\,\varphi\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\,\mathrm{d}\,\rho + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\,\varphi\right)\vec{e}_y = \text{(A)}$$

$$= \left(\cos\varphi\,\mathrm{d}\,\rho - \rho\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi\right)\vec{e}_x + \left(\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\rho + \rho\cos\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi\right)\vec{e}_y =$$

$$= \mathrm{d}\,\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\,\varphi\,\vec{e}_\varphi$$ (ergibt sich aus folgender Zeichnung)



Durch Koeffizientenvergleich erhält man den Zusammenhang zwischen den Basisvektoren:

$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\ \vec{e}_x + \sin\varphi\ \vec{e}_y\ ;\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\ \vec{e}_x + \cos\varphi\ \vec{e}_y \quad \text{(B)}$$

Damit kann man nun den Geschwindigkeits− und Beschleunigungsvektor in Polarkoordinaten darstellen:

$$\vec{r}\,(t) = x\,(t)\ \vec{e}_x + y\,(t)\ \vec{e}_y = \rho\,(t)\ \vec{e}_\rho$$

Mit (A) erhält man: $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\ \vec{r}}{\mathrm{d}\ t} = \dot{\rho}\ \vec{e}_\rho + \rho\ \dot{\varphi}\ \vec{e}_\varphi \Rightarrow v^2 = \vec{v}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\ \dot{\varphi}^2$ (C)

Aus den Zeitableitungen von (B) erhält man: $\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi}\ \vec{e}_\varphi$ und $\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\ \vec{e}_\rho$ (D)
Mit (C) und (D) lässt sich die Beschleunigung formulieren:

$$\vec{a}\,(t) = \ddot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}\ \vec{v}}{\mathrm{d}\ t} = \left(\ddot{\rho} - \rho\ \dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\rho + \left(\rho\ \ddot{\varphi} + 2\ \dot{\rho}\ \dot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi$$

Newtons Axiome

1. Axiom: Es gibt Bezugssysteme, in denen die kräftefreie Bewegung durch $\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \text{const}$ beschrieben wird. Diese Bezugssysteme nennt man **Inertialsysteme**.

2. Axiom: In einem Inertialsystem gilt: $\vec{p}' = \vec{F}$ mit dem Impuls $\vec{p} = m\ \vec{v}$. Bei konstanter Masse ergibt sich daraus $m\ \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$.

3. Axiom: Der Kraft, mit der die Umgebung auf einen Massenpunkt wirkt, entspricht stets eine gleich große, entgegengesetzte Kraft, mit der der Massenpunkt auf seine Umgebung wirkt. $\vec{F}_{\text{actio}} = \vec{F}_{\text{reactio}}$

Allgemeines Vorgehen beim Lösen von Problemen der Newton’schen Mechanik:

1.Aufstellen das Kraftgesetzes

2.Mathematische Lösung der Differentialgleichung
$m\ \ddot{\vec{r}}\,(t) = \vec{F}\,(\vec{r}\,(t)\,,\ \dot{\vec{r}}\,(t)\,,\ t)$

3.Bestimmung der Integrationskonstanten der Lösung: Sie werden durch die Anfangsbedingungen für Ort und Geschwindigkeit festgelegt.

Erhaltungssätze

Impuls: $\frac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}\,t}=\vec{F}\Rightarrow$ Wirkt keine Kraft auf ein Teilchen, so bleibt sein Impuls erhalten.

Drehimpuls: $\frac{\mathrm{d}\,\vec{l}}{\mathrm{d}\,t}=\vec{M}\Rightarrow$ Wirkt kein Drehmoment auf ein Teilchen, so bleibt sein Drehimpuls erhalten. (Beispiel Zentralkraft im Sonnensystem)

Energie: Wirken nur konservative Kräfte, so bleibt die Summe aus kinetischer (T) und potentieller Energie (U) erhalten. Konservative Kräfte lassen sich in folgender Form schreiben: $F_{\mathrm{kons}}\cdot\dot{\vec{r}}=\frac{-\mathrm{d}\,U(\vec{r})}{\mathrm{d}\,t}$

Verschwindet die Rotation einer Kraft, so ist sie gleich dem negativen Gradienten des Potentials
$rot\,\vec{F}(\vec{r})=0\Leftrightarrow\vec{F}(\vec{r})=-\mathrm{grad}\,U(\vec{r})$

System von Massenpunkten

Die Kräfte auf die Massenpunkte lassen sich in innere und äußere Kräfte aufteilen:
Innere Kräfte werden als $\vec{F}_{\nu\mu}$ bezeichnet, äußere als $\vec{F}_{\nu}^{(a)}$.

Dann gilt für den ν −ten Massenpunkt gilt: $m_\nu\,\ddot{\vec{r}}_\nu(t)=\vec{F}_\nu=\vec{F}_\nu^{(a)}+\sum_{\nu=1,\,\mu\neq\nu}^{N}\vec{F}_{\nu\mu}$

Der Ortsvektor zum **Schwerpunkt** des Systems wird festgelegt durch: $\vec{R}=\frac{\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\,\vec{r}_\nu}{\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu}$

Schwerpunktsatz: Der Schwerpunkt eines Systems bewegt sich so, als ob die Masse in ihm vereinigt ist und als ob die Summe der äußeren Kräfte auf ihn wirkt.
$$M\,\ddot{\vec{R}}=\sum_{\nu=1}^{N}\vec{F}_\nu^{(a)}=\vec{F}$$

Die inneren Kräfte beeinflussen die Bewegung des Schwerpunkts nicht. („Man kann sich nicht am eigenen Schopf aus dem Sumpf ziehen"). Wirken keine äußeren Kräfte bleibt also auch der **Schwerpunktimpuls** $\vec{P}=M\,\dot{\vec{R}}$ erhalten**.**

Die inneren Kräfte ergeben ebenfalls kein resultierendes Drehmoment und können deshalb den **Gesamtdrehimpuls L** des Systems nicht verändern. Wirken demnach keine äußeren Kräfte auf das System, so bleibt sein **Gesamtdrehimpuls** erhalten.
$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{L}}{\mathrm{d}\,t}=\sum_{\nu=1}^{N}\vec{r}_\nu\times\vec{F}_\nu^{(a)}=\vec{M}$$

In Abwesenheit dissipativer Kräfte gilt Energieerhaltung, ansonsten gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(T+U)=\sum_{\nu=1}^{N}K_{\nu,\,\mathrm{diss}}\cdot\vec{r}_\nu$$

Inertialsysteme

Newtons Axiome gelten nur in Intertialsystemen. Ein System das relativ zu einem Inertialsystem ruht oder sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, ist selbst auch ein Inertialsystem.

Mit Hilfe von **Galileitransformationen** kann man die Koordinaten verschiedener Inertialsystemen ineinander umrechnen.

Die allgemeine **Galileitransformation** lautet:

$$x_i\,'=\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}\,x_j-v_i\,t-a_i\,;\;\;t'=t-t_0\,;$$

Sie besteht aus folgenden Transformationen:

1. Räumliche Verschiebung um $v_i\,t$
2. Räumliche Verschiebung um a_i
3. Drehung, die durch α_{ij} beschrieben wird
4. Zeitliche Verschiebung um t_0

Die Galileitransformationen bilden eine Gruppe, die **Galileigruppe,**

- da zwei sukzessive Galileitransformationen eines Inertialsystems wieder zu einem solchen führen.
- da es zu jeder Transformation $\mathrm{IS}\rightarrow\mathrm{IS}'$ eine inverse Transformation $\mathrm{IS}'\rightarrow\mathrm{IS}$ gibt.
- da die triviale Transformation $\mathrm{IS}\rightarrow\mathrm{IS}$ ebenfalls eine Galileitransformation ist.

Gültigkeit der Galileitransformation

Die Maxwellgleichungen sind im Gegensatz zu den Newtonschen Axiomen nicht kovariant unter der Galileitransformation. Daraus erklärt sich der Widerspruch, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen den gleichen Betrag hat, obwohl sich die Inertialsysteme relativ zueinander bewegen. Um diesen Widerspruch zu lösen werden die Galileitransformationen durch die Lorentztransformationen (vgl. Relativitätstheorie) ersetzt. Dies impliziert auch, dass Newtons Axiome nicht exakt richtig sind. Die Galileitransformationen und Newtons Axiome bleiben jedoch im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten (c<<v) gültig.

Beschleunigte Bezugssysteme

Linear beschleunigtes Bezugssystem

Sei der Ursprung von KS’ relativ zu IS konstant beschleunigt, also gilt: $\vec{d}\,(t)=\frac{1}{2}\,\vec{a}\,t^2$.

Damit lautet die entsprechende Transformation: $\vec{r}\,(t)=\vec{r}'\,(t)+\frac{1}{2}\,\vec{a}\,t^2$

Aus dem in IS gültigen 1. Newtonschen Axiom ergibt sich als Bewegungsgleichung für ein kräftefreies Teilchen in KS': $m\,\ddot{\vec{r}}'(t') = -m\,\vec{a}$. Die Newtonschen Axiome gelten in KS' also offensichtlich nicht. Der Zusatzterm $m\,\vec{a}$ entspricht der Kraft, die durch ein konstantes Kraftfeld hervorgerufen wird (vgl. Gravitation der Erde $F = m \cdot \vec{g}$). Man nennt die auftretenden Kräfte **Trägheitskräfte** oder **Scheinkräfte**.
Betrachtet man z.B. einen frei fallenden Fahrstuhl so ergibt die oben eingeführte Transformation für die Kraft, die auf eine Person im Aufzug wirkt: $F = m\left(\vec{g} - \vec{a}\right)$. Ist die Beschleunigung des Aufzugs $\vec{a}$ gleich der Erdbeschleunigung $\vec{g}$ so heben sich diese beiden Größen auf und es wirkt keine Kraft mehr, die Person ist also schwerelos!

Rotierendes Bezugssystem

KS' rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{\varphi}}{\mathrm{d}\,t}$ gegenüber IS. Die Vektoren $\vec{\omega}$ und $\mathrm{d}\,\varphi$ zeigen in Richtung der Drehachse. $\left|\mathrm{d}\,\varphi\right|$ ist der Winkel, um den sich KS' während der Zeit $\mathrm{d}\,t$ dreht.

Für einen beliebigen Vektor $\vec{G}$ gilt: $\left(\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{G}}{\mathrm{d}\,t}\right)_{IS} = \left(\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{G}}{\mathrm{d}\,t}\right)_{KS'} + \vec{\omega} \times \vec{G}$ (E)

Damit gilt für die Geschwindigkeit: $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$. Wendet man (E) auf den Geschwindig−keitsvektor an, so erhält man für die Beschleunigung:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,\dot{\vec{r}}}{\mathrm{d}\,t}\right)_{IS} = \left(\frac{\mathrm{d}\left(\dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'\right)}{\mathrm{d}\,t}\right)_{KS'} + \vec{\omega} \times \left(\dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'\right)$$

$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}' + 2\left(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'\right) + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right)$ (F). Da in einem Inertialsystem für ein kräftefreies Teilchen das 1.Axiom gilt ($m\,\ddot{\vec{r}} = 0$), wird $\ddot{\vec{r}}$ null. Löst man (F) nach $\ddot{\vec{r}}'$ auf und multipliziert die Gleichung mit m, so erhält man:

Kraft auf ein kräftefreies Teilchen im rotierenden System

$$m\,\ddot{\vec{r}}' = -2\,m\left(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'\right) - m\,\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right)$$

Die Trägheitskräfte auf der rechten Seite werden **Corioliskraft** und **Zentrifugalkraft** genannt. Die Corioliskraft ist proportional zu $\vec{\omega}$ und zur Geschwindigkeit des betrachteten Massenpunkts. Sie wirkt senkrecht zur Bewegungsrichtung (Ablenkung der Winde auf der Erdoberfläche auf Kreisbahnen $\Rightarrow$ runde Hochdruck− und Tiefdruckgebiete). Die Zentrifugalkraft wirkt von der Drehachse weg. Sie ist proportional zu $\vec{\omega}^2$ und zum Abstand des Massenpunkts von der Drehachse.

Lagrangeformalismus

Bei den Lagrangegleichungen handelt es sich um eine Verallgemeinerung der Newtonschen Axiome. Mit Hilfe der Lagrangegleichungen 1. Art lassen sich Zwangskräfte explizit ausrechnen. Wird dies gar nicht gewünscht, so kann man durch Einführung von verallgemeinerten Koordinaten in den Lagrangegleichungen 2.Art die Zwangskräfte eliminieren.

Lagrangegleichungen 1. Art

Zwangsbedingungen

Im allgemeinen sind nur die Zwangsbedingungen, jedoch nicht die zugehörigen Zwangskräfte bekannt. Diese lassen sich jedoch mit den Lagrangegleichungen 1. Art bestimmen. Eine Zwangsbedingung der Form $g(\vec{r}, t) = 0$ wird **holonom** genannt. Für ein Problem mit N Teilchen kann es maximal $3N-1$ Zwangsbedingungen geben. Betrachtet man nur ein Teilchen kann es folglich höchstens zwei Bedingungen geben. Eine Zwangsbedingung beschränkt die Bewegung des Teilchens auf eine Fläche, zwei Bedingungen auf den Schnitt zweier Flächen. Eine dritte Bedingungen würde das Teilchen auf eine einzigen Punkt festlegen und ist somit nicht sinnvoll.

Zwangskräfte

Die Zwangskraft hängt normalerweise von der tatsächlichen Bewegung ab (vgl. Pendel: die Zwangskraft muss die Schwerkraft sowie die Zentrifugalkraft $m\, l\, \dot{\varphi}^2$ entgegenwirken). In besonders einfachen Fällen kann die Zwangskraft von der Bewegung unabhängig sein. Die Zwangsbedingung legt die Richtung der Zwangskraft fest, sie ist orthogonal zu der, von der Zwangsbedingung festgelegten, Fläche. $g(\vec{r}, t) = 0 \rightarrow \vec{Z} \parallel \mathrm{grad}\, g(\vec{r}, t)$

Dies erlaubt folgenden Ansatz für die Zwangskraft: $\vec{Z}(\vec{r}, t) = \lambda(t)\, \mathrm{grad}\, g(\vec{r}, t)$
Mit $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{Z}$ und der Verallgemeinerung auf kartesische Koordinaten ($x_{1,}\ x_{2,}\ x_{3,} \ldots ,x_{3N}$ bei N Teilchen) erhält man die

Lagrangegleichungen 1. Art

$$m_n \ddot{x}_n = F_n + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha(x_1, \ldots, x_{3N}, t)}{\partial x_n} \qquad (n = 1,2, \ldots, 3N)$$

$$g_\alpha(x_1, \ldots, x_{3N}, t) = 0 \qquad (\alpha = 1,2, \ldots, R)$$

Sind die Kräfte konservativ und die Zwangsbedingung zeitunabhängig, so gilt der Energieerhaltungssatz, also T+U=const. Dies ist z.B. beim Pendel der Fall, da die Schwerkraft konservativ und die Fadenlänge nicht zeitabhängig ist.

Allgemeines Lösungsverfahren

1. Formulierung der Zwangsbedingungen
2. Aufstellen der Lagrangegleichungen
3. Elimination der λ_α
4. Lösung der Bewegungsgleichungen
5. Bestimmung der Integrationskonstanten
6. Bestimmung der Zwangskräfte

Um die λ_α wie in Schritt 3 angegeben zu eliminieren, bildet man die zweifache Ableitung der Zwangsbedingung und setzt in diese die, nach der entsprechenden zweiten Ableitung einer Koordinate aufgelösten, Bewegungsgleichungen ein. Dieses Verfahren liefert die λ_α als Funktionen von $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t$, die sich wiederum in die Bewegungsgleichungen einsetzen lassen.

Lagrangegleichungen 2. Art

Verallgemeinerte Koordinaten

Bei R Zwangsbedingungen sind nur $f = 3N - R$ der $3N$ kartesischen Koordinaten voneinander unabhängig. Man nennt dies die Anzahl der **Freiheitsgrade** des Systems, denn durch Angabe von f Zahlen kann die momentane räumliche Lage des Systems aus N Massenpunkten festgelegt werden. Um die Zwangskräfte zu eliminieren wählt man f geeignete **verallgemeinerte bzw. generalisierte Koordinaten** $q_{1,}\ q_{2,} \ldots, q_f$, sodass die Zwangsbedingungen für sie keine Einschränkung darstellen (z.B. Winkel φ beim Pendel).

Die **Lagrangefunktion der nichtrelativistischen Mechanik** lautet:

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t)$$

Dabei ist T die kinetische Energie und U die potentielle Energie, jeweils ausgedrückt in verallgemeinerten Koordinaten. q steht für $q_{1,}\ q_{2,} \ldots, q_f$ und $\dot{q}$ für $\dot{q}_{1,}\ \dot{q}_{2,} \ldots, \dot{q}_f$. Mit Hilfe der Lagrangefunktion lassen sich die Lagrangegleichungen in folgender Form schreiben:

Lagrangegleichungen 2. Art

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q_k}, \qquad (k = 1, \ldots, f)$$

Erhaltungsgrößen

Allgemeiner Erhaltungssatz

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = \text{const.}$$

Falls eine verallgemeinerte Koordinate q_k nicht explizit in der Lagrangefunktion vorkommt, nennt man diese Koordinate **zyklisch**.

Aus den Bewegungsgleichungen folgt, dass der zugehörige **verallgemeinerte Impuls** $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ erhalten ist.

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \rightarrow \quad p_k = \text{const.}$$

Elektromagnetische Kräfte

Will man elektromagnetische Kräfte behandeln, so hat man es mit einem Potenzial der Form $U(q, \dot{q}, t)$ zu tun (normalerweise ist das Potenzial geschwindigkeitsunabhängig). Elektrische und magnetische Felder können durch das Skalar Φ und das Vektorpotenzial $\vec{A}$ ausgedrückt werden:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\text{grad}\, \Phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot}\, \vec{A}(\vec{r}, t)$$

Daraus ergibt sich:

Die nichtrelativistische Lagrangefunktion für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

$$L(\dot{\vec{r}}, \vec{r}, t) \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - q\, \Phi(\vec{r}, t) + \frac{q}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$$

Reibungskräfte

Kräften der Form $\vec{F}_{\text{diss},n} = -\gamma_n \dot{\vec{x}}_n$ lässt sich kein Potenzial zuordnen.
In verallgemeinerten Koordinaten ergeben sich die verallgemeinerten dissipativen Kräfte

$$Q_{\text{diss},k} = \sum_{n=1}^{3N} F_{\text{diss},n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = \frac{-\partial F(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_k}$$

Mit der

Rayleigh'schen Dissipationsfunktion

$$F(\dot{x}) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{\gamma_n}{2} \dot{x}_n^2 \quad \text{bzw.} \quad F(q, \dot{q}, t) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{\gamma_n}{2} \left[\dot{x}_n(q, \dot{q}, t) \right]^2$$

lassen sich auch Reibungskräfte in den Lagrangegleichungen berücksichtigen.

Lagrangegleichung mit Reibungskräften

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Anmwendung

Allgemeines Lösungsverfahren

1. Wahl der verallgemeinerten Koordinaten $q = (q_{1,} \dots, q_f)$ und Angabe der Transformation $x_n = x_n(q,t)$ zu kartesischen Koordinaten
2. Bestimmung der Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$
3. Aufstellen der Bewegungsgleichungen
4. Bestimmung der Erhaltungsgrößen
5. Lösung der Bewegungsgleichungen, eventuell unter Verwendung von Erhaltungsgrößen
6. Bestimmung der Integrationskonstanten
7. Diskussion der Lösung

Kleine Schwingungen (Eigenfrequenzen)

Lässt sich die Lagrangefunktion wie folgt schreiben

$$L(x_1 \dots x_f, \dot{x}_1 \dots \dot{x}_f) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{f}\left(\overset{\Leftrightarrow}{T}_{ij}\,\dot{x}_i\,\dot{x}_j - \overset{\Rightarrow}{V}_{ij}\,x_i\,x_j\right)$$

so lauten die Lagrangegleichungen:

$$\sum_{j=1}^{f}\overset{\Leftrightarrow}{T}_{ij}\,\ddot{x}_j = -\sum_{j=1}^{f}\overset{\Leftrightarrow}{V}_{ij}\,x_j$$

T und V sind **symmetrische Matrizen**, deren Elemente sich aus der oben angegebenen Form der Lagrangefunktion gewinnen lassen.

Achtung: kommt z.B. der Term $2 \cdot x_1 \cdot x_2$ in der Lagrangefunktion vor, so ist das Matrixelement (1,2) nicht 2 sondern auf Grund der Symmetrie sind die Matrixelemente (1,2) und (2,1) jeweils 1, da $2 \cdot x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot x_1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_2 \cdot x_1$!

Die möglichen **Eigenfrequenzen** des betrachteten Systems ergeben sich als Nullstellen ω_k des folgenden Polynoms vom Grad f:

$$\det\left(\overset{\Leftrightarrow}{V} - \omega^2 \overset{\Leftrightarrow}{T}\right) = P^{(f)}(\omega^2) = 0$$

Man betrachtet nur Eigenfrequenzen mit $\omega_k \geq 0$.

Die **Eigenvektoren** $A^{(k)}$, die sich aus $\left(\overset{\Leftrightarrow}{V} - \omega_k^2 \overset{\Leftrightarrow}{T}\right) A^{(k)} = 0 \quad (k = 1, \dots, f)$ ergeben, bestimmen die möglichen **Schwingungsmodi** des Systems.

Bei einem dreiatomigen Molekül m−M−m (System mit drei, über zwei Federn gekoppelte, Teilchen) ergeben sich beispielsweise folgende Modi:

$$\omega_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

keine Schwingung, sondern gleichförmige Bewegung des gesamten Moleküls

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

Das mittlere Atom ruht, die beiden anderen schwingen gegenphasig

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 + \frac{2\ m}{M}\right)} \quad \Rightarrow \quad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\ m/M \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

Die beiden äußeren Atome schwingen gleichphasig, jedoch gegenphasig zum mittleren.

Starre Körper

Grundlegende Eigenschaften

➔ beschrieben durch 6 Koordinaten (drei Koordinaten für den Schwerpunkt und drei Winkel, die die Drehachse relativ zu den Koordinatenachsen beschreiben)

➔ in einem starren Körper: es gibt eine gemeinsame Drehachse, alle Teilchen bewegen sich rechtwinklig zur Drehachse mit Geschwindigkeit proportional zum Abstand zur Achse; Geschwindigkeitsvektor eines Punkts (bezüglich Raumsystem): $\dot{\vec{x}} = \vec{\omega} \times \vec{x}$ (also senkrecht auf Drehachse (Vektor der Winkelgeschwindigkeit ist in Raum− und Körpersystem gleich) und Ortsvektor (bezüglich Körpersystem))

➔ Ursprung des Körpersystems: sinnvollerweise entweder Schwerpunkt oder, wenn es ein Kreisel ist, der Befestigungspunkt

➔ kinetische Energie: Integral über die kinetischen Energien aller Massenelemente

➔ Trägheitstensor ist symmetrisch, man kann ihn diagonalisieren (d.h. es gibt immer ein Koordinatensystem, in dem die Hauptträgheitsachsen mit den Koordinatenachsen zusammen−fallen); vgl. auch weiter unten

➔ Körpersystem: kein Inertialsystem, mit dem Körper fest verbunden, daher sind in diesem System alle Geschwindigkeiten 0. Raumsystem: Inertialsystem

➔ Eulerwinkel: geben an, wie die drei Achsen des Körpersystems gegenüber dem Raumsystem gekippt sind

➔ Eulergleichungen: damit kann man das Drehmoment aus Trägheitstensor und Winkel−geschwindigkeiten (aus den Gleichungen der Eulerwinkel) ausrechnen

➔ Raketenaufgabe: Während das Triebwerk läuft, kann man das Drehmoment sowohl über Kraft und Hebelarm als auch über die Eulergleichungen berechnen; Gleichsetzen liefert die Winkelgeschwindigkeiten. Den Drehimpuls kann man aus den Winkelgeschwindigkeiten und den Trägheitsmomenten berechnen.

Der Trägheitstensor

stellt eine 3x3 Matrix dar. Seine Elemente lauten $\Theta_{ik} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(r_\nu^2\, \delta_{ik} - x_i^\nu\, x_k^\nu \right)$.

Geht man von Punktmassen zu einer kontinuierlichen Massenverteilung der Dichte $\rho = \frac{\Delta\, m}{\Delta\, V}$ über so ergibt sich: $\Theta_{ik} = \int d^3\, r\, \rho\,(r) \left(r^2\, \delta_{ik} - x_i\, x_k \right)$.

Für den Drehimpuls gilt: $L_i = \sum_{k=1}^{3} \Theta_{ik}\, \omega_k$.

Mit $\vec{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$, $\overset{\Leftrightarrow}{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} \end{pmatrix}$, $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$ gilt: $\vec{L} = \overset{\Leftrightarrow}{\Theta}\, \vec{\omega}$

Für die Rotationsenergie gilt: $T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{ik} \Theta_{ik}\, \omega_i\, \omega_k = \frac{1}{2}\, \vec{\omega}^T\, \overleftrightarrow{\Theta}\, \vec{\omega}$

Es lässt sich immer ein Koordinatensystem finden, indem die nur die Diagonalelemente von $\overleftrightarrow{\Theta}$ ungleich null sind. Dieses System nennt man Hauptachsensystem. Die Diagonalelemente heißen dann Hauptträgheitsmomente. Im Hauptachsensystem sind bei der Rotation um eine Achse Drehimpuls $\vec{L}$ und Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ parallel zueinander. Bei symmetrisch gebauten Körpern fallen die Hauptachsen mit den Symmetrieachsen zusammen. Wenn alle drei Hauptträgheitsmomente verschieden sind, so spricht man von einem unsymmetrischen Kreisel. Sind zwei gleich, handelt es sich um einen symmetrischen Kreisel. Bei einer Kugel oder Würfel sind alle drei Hauptträgheitsmomente gleich.

Euler'sche Winkel

Die Euler'schen Winkel stellen verallgemeinerte Koordinaten für die Drehbewegung eines starren Köpers da. Sie legen die Lage eines körperfesten (x_1,x_2,x_3) relativ zu einem raumfesten (x,y,z) Koordinatensystem fest. Das raumfeste Koordinatensystem ist zugleich ein Inertialsystem. Im einzelnen sind die Euler'schen Winkel wie folgt definiert:

Die x−y−Ebene und die x_1−x_2−Ebene schneiden sich in der Knotenlinie K. Ihre Richtung wird der Einheitsvektor $\vec{e}_k$ zugeordnet. ϕ bezeichnet den Winkel zwischen der x−Achse und K, ψ den Winkel zwischen K und der x_1−Achse und θ den Winkel zwischen der z−Achse und der x_3−Achse.

Die **Euler'schen Gleichungen** lauten:

$$\Theta_1\, \dot{\omega}_1 + \left(\Theta_3 - \Theta_2\right) \omega_2\, \omega_3 = M_1$$

$$\Theta_2\, \dot{\omega}_2 + \left(\Theta_1 - \Theta_3\right) \omega_1\, \omega_3 = M_2$$

$$\Theta_3\, \dot{\omega}_3 + \left(\Theta_2 - \Theta_1\right) \omega_2\, \omega_3 = M_3$$

Die $\Theta_i \quad (i = 1,2,3)$ bezeichnen dabei die Hauptträgheitsmomente des betrachteten Körpers.
Drückt man die Winkelgeschwindigkeiten durch die Euler'schen Winkel und ihre Ableitungen aus, so erhält man:

$$\omega_1 = \vec{\omega} \cdot \vec{e}_1 = \dot{\phi}\ \sin\ \theta\ \sin\ \psi + \dot{\theta}\ \cos\ \psi$$

$$\omega_2 = \vec{\omega} \cdot \vec{e}_2 = \dot{\phi}\ \sin\ \theta\ \cos\ \psi - \dot{\theta}\ \sin\ \psi$$

$$\omega_3 = \vec{\omega} \cdot \vec{e}_3 = \dot{\phi}\ \cos\ \theta + \dot{\psi}$$

Setzt man diese Beziehungen in die Euler'schen Gleichungen ein, so erhält man drei DGL 2. Ordnung für die drei Eulerwinkel. Dies sind die **Bewegungsgleichungen des starren Körpers**.

Nichtlineare Dynamik (Chaos)

- Bedingungen: mindestens 3 unabhängige Variablen, die Bewegungsgleichungen haben einen nichtlinearen Term, der mindestens zwei dieser Variablen koppelt
- Verhalten: Bei einem chaotischen System wächst bei verschiedenen Anfangsbedingungen der Abstand exponentiell mit der Zeit, bei einem linearen System nur linear. Daher gibt es beim chaotischen System eine sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen, die eine Vorhersage praktisch unmöglich macht – dennoch folgt es den deterministischen Newtonschen Gesetzen und nicht etwa einem Zufallsprinzip.
- Phasenraum: Winkelgeschwindigkeit wird über Winkel aufgetragen.
  - Graphen im Phasenraum heißen Trajektorien
  - ungedämpftes Pendel: macht Kreise, gedämpftes Pendel macht Spiralen, die auf den Ursprung zulaufen (d.h. der Ursprung ist Attraktor, speziell sogar ein Fokus)
  - Die Kurve zwischen zwei Attraktoren heißt Separatrix. Beispiel: Separatrix ist Grenzfall, wenn das Pendel gerade nicht überschwingt, sondern bei 180° Auslenkung zur Ruhe kommt und entweder auf die eine oder andere Seite schwingen könnte und so zur einen oder (um 360° verschobenen) anderen Ruhelage kommen (wenn es gedämpft ist).
  - In einem deterministischen System überkreuzen sich die Trajektorien nicht
  - Für konservative Systeme gilt außerdem Flächenerhaltung (d.h. alle Punkte in einem Flächenstück bewegen sich so, dass sie zu allen Zeiten die gleiche Fläche im Phasenraum bedecken – Beispiel: zwei Pendel, die mit verschiedener Amplitude schwingen; ein Flächenstück zwischen den Trajektorien bleibt immer gleich groß). Gegenbeispiel: z.B. gedämpftes Pendel; zwei Trajektorien, die spiralförmig sind, laufen immer enger aufeinander zu (da die Dämpfung geschwindigkeitsabhängig ist), die Energie bleibt nicht erhalten.
- Poincaré−Schnitt: wie Phasenraum, aber man zeichnet den Graph nicht permanent auf, sondern nur periodisch (sozusagen stroboskopisch), d.h. pro Schwingung ein Punkt. Ist die Schwingung linear und ungedämpft, dann entsteht nur ein einziger Punkt. Für nichtlineares Verhalten entsteht ein Graph, der einem „strange attractor“ folgt, Selbstähnlichkeit zeigt und durch eine fraktale Dimension charakterisiert werden kann.
- Bifurkation: wenn eine zweite stabile Lösung auftaucht wenn man einen Parameter der DGL verändert. Effekt der Periodenverdopplung: die zweite Lösung hat eine tiefere Frequenz.
  Man kann einen nichtlinearen Schwinger konstruieren, der in Abhängigkeit vom Anfangszustand in zwei verschiedenen Frequenzen schwingen kann, d.h. mechanischer Flipflop; mit linearen Systemen ist das nicht möglich.
- Feigenbaum−Konstante? [...anschaulich??? Logistische Abbildung? phase locking?]
- Logistische Abbildung: Algorithmus; man geht von einer Geraden (Steigung 1) zu einer Kurve und wieder zurück; ist am Schnittpunkt der Geraden mit der Kurve die Steigung der Kurve kleiner als 1, gibt’s Chaos.
- Ljapunov−Exponent: Die Divergenz zwischen zwei benachbarten Punkten nach n Iterationen kann man mit dem Ljapunov−Exponenten beschreiben: ist der Anfangsabstand $\varepsilon_0 = \varepsilon\,(0)$, dann ist er nach n Iterationen näherungsweise $\varepsilon_0 \cdot e^{\lambda\, n}$. Das λ ist dabei der Ljapunov−Exponent; ist er größer als 0, dann divergieren die benachbarten Punkte, das Verhalten ist chaotisch.
  Der Ljapunov−Exponent gibt die mittlere exponentielle Streckung zweier benachbarter Punkte pro Iterationsschritt an.

➔ Intermittenz: Das Verhalten pendelt zwischen langen, peiodischen Phasen (intermissions) und kurzen unregelmäßigen Ausbrüchen (Beispiel: Planetoiden, die viele Jahre in stabilen Bahnen kreisen, und dann plötzlich rausgeschossen werden und z.B. als Sternschnuppen auf der Erde verglühen).

➔ Haussdorf−Dimension: Man braucht $N=(L/\varepsilon)^d$ Stücke, um eine Strecke der Länge L mit Stücken der Länge ε zu überdecken (in d Dimensionen; Strecke oder Fläche oder Volumen usw., je nach Dimension). $d=(\ln N)/(\ln(1/\varepsilon))$ ist dann die Haussdorf−Dimension: z.B. Koch−Kurve: Man benötigt immer 4 Stücke, um ein Kurvenstück (der Länge 1) mit Stücken der Länge 1/3 zu überdecken, die Haussdorf−Dimension der Koch−Kurve ist also etwa 1,26. Bedeutung: die Kurve ist raumfüllender als eine Linie, aber deutlich weniger raumfüllend als eine Fläche.