Zusammenfassung

Maxwellgleichungen
und
elektromagnetische Wellen

nach dem Buch „Physik“ von Paul A. Tipler, Spektrum Akademischer Verlag

Datum: 11.02.2000

von Michael Wack

http://www.skriptweb.de

Hinweise (z.B. auf Fehler) bitte per eMail an uns: mail@skriptweb.de - Vielen Dank.

Einleitung

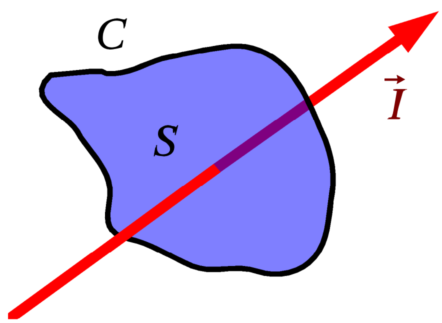
James Clerk Maxwell, schottischer Physiker, 1831-1879, gelang es um 1860 die aus Experimenten abgeleiteten Gesetze der Elektrizität und des Magnetismus in einer knappen mathematischen Formulierung, den sog. „Maxwellgleichungen“, zusammenzufassen. Da das Ampèrsche Gesetz nur für geschlossene Ströme galt, erweiterte er es durch die Einführung das Verschiebungsstroms. In dieser allgemeineren Form gilt es dann auch für unterbrochene Ströme, wie z.B. einen Kondensator. Mit den Maxwellschen Gleichungen lassen sich die Wellengleichungen für elektrische und magnetische Felder herleiten, sowie zeigen, dass sich diese mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Daraus lässt sich dann folgern, dass es sich bei Licht ebenfalls um eine elektromagnetische Welle handelt.

Der Maxwellsche Verschiebungsstrom / Ampèrsches Gesetz

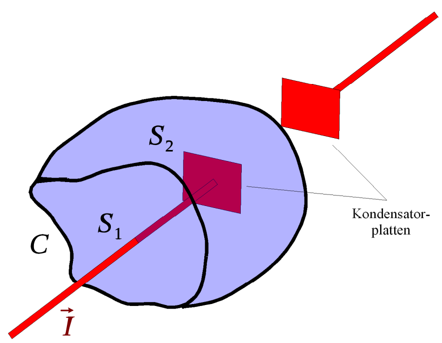
Das ursprüngliche Ampèrsche Gesetz stellt einen Zusammenhang zwischen dem Linienintegral des Magnetfeldes B entlang einer beliebigen Kurve C und dem Strom, der durch eine beliebige von C umschlossene Fläche fließt, her.

Ampèrsches Gesetz

$$\oint_C \vec{B} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} = \mu_0\,\vec{I} \quad \text{für jede geschlossene Kurve C}$$



Diese Formulierung führt bei unterbrochenen Strömen zu Inkonsistenzen, wie man anhand folgender Skizze leicht einsieht.



Die Fläche S_1 wird vom Strom I durchflossen, S_2 jedoch nicht. Dies führt zu einer Mehrdeutigkeit des Linienintegrals über C. Da das Ampèrsche Gesetz keinen Aussage über die Form der betrachteten Flächen macht, ist es offensichtlich im Falle der Fläche S_2 nicht gültig. Um dieses Problem zu beseitigen führte Maxwell den Verschiebungsstrom $I_V = \epsilon_0 \frac{\mathrm{d}\,\Phi_e}{\mathrm{d}\,t}$ ein. Φ_e bezeichnet den Fluss des elektrischen Feldes durch dieselbe von C umrandete Fläche, die bei der Berücksichtigung des Leitungsstroms zugrunde gelegt wird.

Verallgemeinertes Ampèrsches Gesetz

$$\oint_C \vec{B} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} = \mu_0 \left(I + I_v \right) = \mu_0\,\vec{I} + \mu_0\,\epsilon_0 \frac{\mathrm{d}\,\Phi_e}{\mathrm{d}\,t}$$

Die Maxwellschen Gleichungen

Maxwellsche Gleichungen in Integralform

$$\oint_S E_n\,\mathrm{d}\,A = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{innen} \quad \text{(A)}$$

$$\oint_S B_n\,\mathrm{d}\,A = 0 \quad \text{(B)}$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\,\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \int_S B_n\,\mathrm{d}\,A \quad \text{(C)}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} = \mu_0\,\vec{I} + \mu_0\,\epsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \int_S E_n\,\mathrm{d}\,A \quad \text{(D)}$$

Durch Anwenden der Integralsätze von Gauß und Stokes lassen sich die Gleichungen in folgender Form schreiben:

Maxwellsche Gleichungen in Differentialform

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varrho \quad \text{(A)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{(B)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial\,\vec{B}}{\partial\,t} = 0 \quad \text{(C)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial\,\vec{D}}{\partial\,t} = \vec{I} \quad \text{(D)}$$

$$\text{mit } \vec{D} = \epsilon_0\,\vec{E} \text{ und } \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\,\vec{B}$$

Erläuterungen:

(A) ist das Gaußsche Gesetz. Die Integralform beschreibt die Divergenz elektrischer Feldlinien von positiven Ladungen und die Konvergenz bei negativen Ladungen. Die Differentialform verknüpft die Divergenz des elektrischen Feldes mit der Ladungsdichte in einem bestimmten Raumpunkt. Die Quellen des elektrischen Feldes sind demnach Ladungen.

(B) wird manchmal als Gaußsches Gesetz des Magnetismus bezeichnet. Es besagt, dass der Fluss des magnetischen Feldes $\vec{B}$ durch eine geschlossene Oberfläche gleich null ist. Dies ist gleichbedeutend mit folgender Feststellung: das magnetische Feld ist quellenfrei und es existieren somit keine isolierten magnetische Pole.

(C) ist das Faradaysche Induktionsgesetz. Es besagt, dass das Linienintegral einer beliebigen geschlossenen Kurve C gleich der negativen Änderung des magnetischen Flusses durch eine beliebige von der Kurve umrandeten Fläche S ist. Das Induktionsgesetz setzt das elektrische Feld $\vec{E}$ mit der zeitlichen Änderung des magnetischen Feldes $\vec{B}$ in Beziehung.

(D) ist das verallgemeinerte Ampèrsche Gesetz. Das Linienintegral über das Magnetfeld $\vec{B}$ entlang einer beliebigen geschlossenen Kurve C ist gleich der Summe aus dem Leitungsstrom und der Änderung des elektrischen Flusses durch eine beliebige von der Kurve eingeschlossenen Fläche S. Das Ampèrsche Gesetz stellt eine Relation zwischen dem Magnetfeld $\vec{B}$ und der zeitlichen Änderung des elektrischen Feldes $\vec{E}$ her.

Herleitung der Wellengleichung für elektromagnetische Wellen

Betrachtet man die Maxwellschen Gleichungen im Vakuum, also im quellenfreien Raum und vernachlässigt somit Ladungen und Ström lassen sich die Gleichungen wie folgt schreiben:

Maxwellsche Gleichungen im Vakuum

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ (A)

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (B)

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}$ (C)

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (D)

Bildet man zunächst die Rotation der Gleichungen (C) und (D) und setzt dann (D) auf der rechten Seite von (A) und (C) auf der rechten Seite von (B) ein und wendet dann die für jedes Vektorfeld $\vec{a}$ geltende Beziehung $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}\right) - \vec{\Delta} \vec{a}$ an, so erhält man die Wellengleichungen für das elektrische bzw. magnetische Feld im Vakuum in Ihrer allgemeinen Form.

Allgemeine Form der Wellengleichungen

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

$$\vec{\Delta} \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}$$

Beschränkt man sich auf Änderungen in einer Dimension, so kann man den Laplace-Operator durch den Operator $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ersetzen und erhält damit die üblichen Wellengleichungen für den Spezialfall einer ebenen elektromagnetischen Welle.

Wellengleichungen einer ebenen elektromagnetischen Welle

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Eine mögliche Lösung dieser Gleichungen ist die Wellenfunktion für harmonische Wellen $E_y = E_{y0} \sin\left(kx - \omega t\right)$, wobei $\omega / k = c$ gilt. Aus (3) erhält man folgende Beziehung:

$B_{z0} = \frac{k}{\omega} E_{y0} = \frac{E_{y0}}{c}$.

Magnetisches und elektrisches Feld stehen demnach bei der von uns betrachteten ebenen Welle senkrecht aufeinander und haben dieselbe Phase. Es handelt sich um eine **linear polarisierte** Welle. Für die Beträge der Felder gilt E/B = c.

Energie und Impuls elektromagnetischer Wellen

Die Gesamtenergiedichte einer elektromagnetischen Welle ergibt sich aus der Summe der elektrischen und der magnetischen Energiedichte.

$$w_{el} = \frac{1}{2}\,\epsilon_0\,E^2$$
$$w_m = \frac{B^2}{2\,\mu_0} = \frac{(E/c)^2}{2\,\mu_0} = \frac{1}{2}\,\epsilon_0\,E^2$$
$$\Rightarrow\; w_m = w_{el}$$

Energiedichte einer elektromagnetischen Welle

$$w = w_{el} + w_m = \frac{1}{2}\,\epsilon_0\,E^2 + \frac{1}{2}\,\epsilon_0\,E^2 = \epsilon_0\,E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{E\;B}{\mu_0\;c}$$

Die Intensität einer Welle ergibt sich aus dem Produkt der mittleren Energiedichte und der Ausbreitungsgeschwindigkeit.
Demnach ergibt sich für eine Welle im Vakuum die momentane Intensität zu:

$$I_{\text{momentan}} = w\;c = c\;\epsilon_0\;E^2 = c\;\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{E\;B}{\mu_0}$$

Diese Gleichung lässt sich zu folgender Gleichung verallgemeinern:

Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$$

Stehen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in einer elektromagnetischen Welle senkrecht aufeinander, so gibt der Betrag von $\vec{S}$ die momentane Leistung und die Richtung von $\vec{S}$ die Ausbreitungsrichtung der Welle an.

Die **mittlere Intensität** ergibt sich zu:

$$I = \overline{w}\;c = \frac{1}{2}\;\frac{E_0\;B_0}{\mu_0} = \frac{E_{eff}\;B_{eff}}{\mu_0}$$

mit $E_{eff} = E_0/\sqrt{(2)}$ und $B_{eff} = B_0/\sqrt{(2)}$

Der Betrag des Impulses einer elektromagnetischen Welle ist gleich 1/c mal der Energie W der Welle.

Zusammenhang zwischen **Impuls und Energie** einer elektromagnetischen Welle

$$p = \frac{W}{c}$$

Die Intensität einer Welle, geteilt durch c, ergibt einen Impuls pro Zeit- und Flächeneinheit. Ein Impuls pro Zeiteinheit entspricht einer Kraft und eine Kraft pro Flächeninhalt ergibt einen Druck. Diesen bezeichnet man dann als Strahlungsdruck P_S.

Strahlungsdruck einer elektromagnetischen Welle

$$P_S = \frac{I}{c} = \frac{E_0\ B_0}{2\ \mu_0\ c} = \frac{E_{eff}\ B_{eff}}{\mu_0\ c} = \frac{E_0^2}{2\ \mu_0\ c^2} = \frac{B_0^2}{2\ \mu_0}$$