TU München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. K. Buchner
Dr. P. Giesl

Sommersemester 2001

Mathematik für Physiker 4

— Zusätzliche Übungen (Funktionentheorie) —

Ü.1: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion, die auf $\mathbb{R}$ reellwertig ist. Zeigen Sie mit Hilfe des Identitätssatzes:

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$$

Ü.2: Berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\rho^4+x^4}\, dx$, wobei $\rho > 0$.

Ü.3: Berechnen Sie die folgenden Integrale mit dem Residuensatz. $K_r(z_0)$ bezeichnet den Kreis um z_0 mit Radius r.

(a) $\int_{K_{1/2}(0)} \frac{z+1}{z^4+z^2}\, dz$

(b) $\int_{K_2(0)} \frac{z+1}{z^4+z^2}\, dz$

Ü.4: Berechnen Sie das Residuum an der Stelle 0 von $\frac{1}{\sin \pi z}$ und von $\frac{1-\cos z}{z^3}$.

Ü.5: Berechnen Sie alle Werte von $(-1)^i$ und $(-1)^{\sqrt{i}}$.

Ü.6: Entwickeln Sie $\frac{z}{z^2+1}$ in eine Laurentreihe um $z_0 = 0$.

Lösungen

Ü.2: $\frac{\pi}{\rho\sqrt{2}}$

Ü.3: (a): $2\pi i$, *(b):* 0

Ü.4: $\frac{1}{\pi}$ *und* $\frac{1}{2}$

Ü.5: $\exp(-\pi - 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ *sowie* $\exp(\pm\frac{\pi}{\sqrt{2}}(-1+i)(1+2k))$, $k \in \mathbb{Z}$

Ü.6: $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k+1}$, *konvergiert für* $0 < |z| < 1$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{z^{2k+1}}$, *konvergiert für* $|z| > 1$