TU München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. K. Buchner
Dr. P. Giesl

Sommersemester 2001

Abgabe am 11. Juli 2001
zu Beginn der Übung

Mathematik für Physiker 4

— Übungsblatt 9 —

Alle Aufgaben zählen 4 Punkte.

9.1: Berechnen Sie mit Hilfe der Cauchy-Integralformel folgende Integrale

(a) $\int_{|z-2i|=1} \frac{dz}{z^2+iz+6}$

(b) $\int_{|z|=2} \frac{e^{t^2 z}}{z^2+1} dz$ für $t > 0$

(c) $\int_K \frac{dz}{z^2+1}$ für die vier Kreise $|z| = \frac{1}{2}$, $|z| = 2$, $|z-i| = 1$ und $|z+i| = 1$

9.2: Berechnen Sie mit Hilfe der Cauchy-Integralformel für höhere Ableitungen folgende Integrale

(a) $\int_{|z-a|=1} \frac{ze^z dz}{(z-a)^3}$ für $a \in \mathbb{C}$

(b) $\int_{|z-1|=1} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$ für $n \in \mathbb{N}$

9.3: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei eine auf $\mathbb{C}$ holomorphe und beschränkte Funktion, d.h. $|f(z)| \leq C$ mit $C \in \mathbb{R}^+$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß dann $f(z) = a$ mit einer Konstanten $a \in \mathbb{C}$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ und einen Kreis K_r um z mit Radius r. Berechnen Sie $f'(z)$ mit der Cauchyschen Integralformel und zeigen Sie $f'(z) = 0$ durch $r \to \infty$.

9.4: Zeigen Sie, daß jedes Polynom $p(z) = a_n z^n + \ldots a_1 z + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ und $n \geq 1$ mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ besitzt.

Hinweis: Falls $p(z)$ keine Nullstelle besitzt, ist $f(z) := \frac{1}{p(z)}$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, daß $f(z)$ beschränkt ist, und wenden Sie Aufgabe 9.3 an.