Ein Skript der Vorlesung

Mathematik für Physiker
Analysis

nach dem Buch „Analysis 1“ von Prof. Dr. Königsberger, Springer Verlag

Prof. Peter Vogl
TU München
1./2. Semester, WS 1999/2000, SS 2000

Datum: 02.10.2000

von Michael Wack, Christoph Moder, Manuel Staebel

http://www.skriptweb.de

Hinweise (z.B. auf Fehler) bitte per eMail an uns: mail@skriptweb.de - Vielen Dank.

Inhaltsverzeichnis

0. Mengen

Negation: $\bar{A}$, $\neg A$

Konjunktion: $A \cap B$ ~ A und B ~ sowohl A als auch B ~ A et B

A	B	A ∧ B
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Alternative: $A \cup B$ ~ A oder B ~ zumindest A oder B ~ A rel B

A	B	A ∨ B
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Implikation: $A \Rightarrow B$ ~ aus A folgt B ~ wenn A gilt, so gilt B

~ B gilt, wenn A gilt ~ A gilt nur dann, wenn B gilt

~ B ist notwendige Bedingung für A

~ A ist hinreichende Bedingung für B

A	B	A ⇒ B
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Beispiel: A = „*Morgen scheint die Sonne.*“

B = „*Wir schwänzen die Vorlesung.*“

$A \Rightarrow B$ ~ $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$

Man muß A und (A ⇒ B) beweisen, nur dann gilt B.

Man muß A und $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$, Beweis durch Widerspruch.

0.2 Prädikatenlogik

$A(x)$: ∀ x: $A(x)$, es gibt wenigstens ein x, A(x): $\exists\, x : A(x)$

$$\hat{\exists}\ x : A(x)$$

0.3 Mengen

$\omega \in \Omega, \omega \notin \Omega,$

$A = \{\omega | \omega \in \Omega \cap E(\omega)\}$

$I = [a,b] = \{x | a \leq x \leq b\} = \{x | a \leq x \cap x \leq b\}$

$A \subset B$ (A Teilmenge von B)

$A \cap B := \{\omega | \omega \in A \cap \omega \in B\}$

$A \cup B := \{\omega | \omega \in A \cup \omega \in B\}$

$A \setminus B := \{\omega | \omega \in A \cap \omega \notin B\}$

$A \times B := \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$

0.4 Abbildungen

$f\colon A \rightarrow B$ („A nach B“, „A in B“)

$x \rightarrow f(x)\ ; \quad x \in A$

Vorschrift, die jedem $x \in A$ genau ein $f(x) \in B$ zuordnet.

A ≙ Definitionsbereich
B ≙ Wertebereich
f(x) ≙ Bild von x unter f

$f(A) := \{f(x) | x \in A\}$ Wertebereich von f

Injektiv $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (nur monotone Funktionen!)
Bei injektiver Abbildung: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Surjektiv: $\forall\ y \in B\ \ \exists x \in A\colon f(x) = y$ für jedes $y \in B$ gibt es wenigstens ein $x \in A$, für das gilt $f(x) = y \Leftrightarrow f(A) = B$ Abbildung von A auf B.

Beispiel für eine nicht surjektive Funktion:

$f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cap$ f ist beschränkt; --> bildet nicht alle reellen Zahlen auf alle ab (sondern alle auf wenige)

Bijektiv: Abbildung ist **injektiv und surjektiv** –> Abbildung ist **umkehrbar eindeutig** $\triangleq$ **eineindeutig**

1. Natürliche Zahlen und vollständige Induktion ℕ

1.1 Vollständige Induktion

$A(n) \quad \forall n$

Beweisprinzip: A(n)

(I) A(1) (Induktionsanfang)

(II) $\forall n\, A(n) \Rightarrow A(n+1)$

Beispiel 1: $\forall n\, 1+2+...+n=\frac{1}{2}n(n+1)\ldots A(n)$

Beweis: 1 = 1 (Induktionsanfang bewiesen)

n>1: $1+2+....+n+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

$\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ ❑

Beispiel 2: $\forall x\neq 1 \quad 1+x+\ldots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\ldots A(n)$

$n=1: \quad 1+x=1+x$

$n>1: \quad 1+\ldots+x^{n+1}=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}+x^{n+1}=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}+\frac{x^{n+1}(1-x)}{1-x}=\frac{1-x^{n+2}}{1-x}$ ❑

1.2 Fakultäten, Binominalkoeffizienten

Definition: $n!:=1\cdot 2\cdot 3\ldots n \quad \forall n$

Satz 1: Die Anzahl der Anordnungen n verschiedener Elemente ist n!.

Definition: Die Permutation einer Menge M P: M $\rightarrow$ M ist eineindeutig.

Bemerkung: *M = {1,....,n}-> {P(1) ... P(n)}*

Satz 1': Die Anzahl der Permutationen n verschiedener Elemente ist n!.

Bemerkung: *0! := 1*

(n+1)! = (n+1) n! $\forall n \cap n=0$

Satz 2 und Definition: Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer nichtleeren Menge mit n Elementen ist (0 < k <= n)

$$\frac{n(n-1)(n-2)....(n-k+1)}{k!}=:\binom{n}{k}$$

Beispiel: (1 2 3)

2-elementige Teilmengen: (1 2), (1 3), (2 3)

$$\binom{3}{2}=\frac{3\cdot 2}{2!}=\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}=3$$

$$\binom{505}{503}=\frac{505\cdot504\cdot503\cdot......\cdot3}{1\cdot2\cdot....\cdot503}=\frac{505\cdot504}{2}$$

Beispiel: Wahrscheinlichkeit „6 aus 49“

$$\frac{1}{\binom{49}{6}}=\frac{1}{\frac{49\cdot48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}}=\frac{1}{13983816}$$

Definition: $\binom{n}{k}$ Binominalkoeffizienten

Satz **(Binominalentwicklung):**

$$n\in\mathbb{N}\ :\ (1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}+x^n$$

Beweis: $(1+x)^n=(1+x)(1+x)\ldots(1+x)$

$\binom{n}{k}$ Möglichkeiten k Klammern auszuwählen und daraus x als Faktor zu nehmen. ❑

Rechenregeln:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{n}=1,\ \binom{n}{0}=1$$

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$$

Pascalsches Dreieck:

n = 0	1	
n = 1	1 1	
n = 2	1 2 1	
n = 3	1 3 3 1	
n = 4	1 4 6 4 1	$\binom{n}{0},\binom{n}{1}.....\binom{n}{n-1},\binom{n}{n}$

2. Reelle Zahlen

a) $\mathbb{N}=\{1,2,3,.....\}$

b) $\mathbb{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,....\}$

c) $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n} | m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}\right\}$

Eigenschaften:

- Körperstruktur
- Anordnung
- Vollständigkeit

2.1 Körperstruktur von $\mathbb{R}$

	Addition	**Multiplikation**
(K1) Kommutativ	a+b = b+a	ab = ba
(K2) Assoziativ	(a +b) + c = a + (b + c)	(ab)c = a(bc)
(K3) Lösbar	A + x = b	A * x = b (a<>0)
(K4) a(b+c) = ab +ac		

Beispiel: $a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \cup b=0$

__Bemerkung:__ $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ haben gleiche Körperstruktur

2.2 Anordnung in $\mathbb{R}$

(A1) $\forall\, a\in\mathbb{R}$ gilt genau eine der Relationen: $a>0$ positiv; $a=0$; $-a>0$ negativ

(A2) $a>0 \cap b>a \Rightarrow a+b>0 \cap ab>0$

(A3) [**Archimedisches Axiom**]: $\forall\, a\in\mathbb{R}\ \exists\, n\in\mathbb{N} \vdots n-a>0$

Definition: $\mathbb{R}_{+}=\{r | r\in\mathbb{R} \cap r>0\}$

Definition:

a > b	falls	a - b > 0		
b < a	falls	a > b		
a >= b	falls	a > b	oder	a = b
a <= b	falls	a < b	oder	a = b

Folgerung:

1) $\forall\, a,b\in\mathbb{R}$ gilt genau eine der Relationen: a>b, a=b, a<c

2) Aus a > b, b > c –> a > c (Transitivität)

3) Aus a > b –> $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ falls $a, b \neq 0$

$a + c > b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$

ac > bc falls c > 0

ac < bc falls c < 0

4) Aus a > b und $\alpha > b \Rightarrow \begin{cases} a+\alpha > b+\beta \\ \alpha\, a > \beta\, b \quad \text{falls } b, \beta > 0 \end{cases}$

5) $\forall\, a \neq 0$ gilt $a^2 > 0$

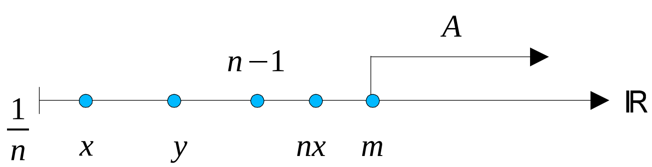
Satz 3: (**Supremumseigenschaft** von $\mathbb{R}$): Jede nach oben (unten) beschränkte, nichtleere Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein **Supremum** (Infimum).

Beweis: aus Intervallschachtelung.

Satz 4: Jede nach oben (unten) beschränkte, nichtleere Menge ganzer Zahlen enthält eine größte (kleinste) Zahl.

Beweis: mit vollständiger Induktion.

Satz 5: $\forall\, x, y \in \mathbb{R} \wedge x < y \quad \exists\, q \in \mathbb{Q} \quad x < q < y$ ($\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$)



Beweis: $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < y - x$ (Archimedisches Axiom A3 + 3).

$A = \{ z \mid z \in \mathbb{Z}, z > ny \}$

$A \neq \emptyset$, kleinste Zahl (Satz 4) in m

$nx < m \Rightarrow x < \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} < x + y - x = y$ (da $\frac{m-1}{n} < x$; $\frac{1}{n} < y - x$)

$x < \frac{m}{n} < y$; $q := \frac{m}{n}$;

2.4 $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar

Definition: Eine Menge A heißt **abzählbar**, wenn $\exists\, f : \mathbb{N} \to A$, f bijektiv ($\forall\, a \in A \quad \overset{1}{\exists}\, n \in \mathbb{N} \quad f(n) = a$).

$f(n) \equiv a_n$; $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ mit $a_n \neq a_m$ für $n \neq m$.

$a := f(n)$

Beispiel: $\mathbb{Z}$ ist abzählbar:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{n gerade} \\ \frac{1-n}{2} & \text{n ungerade} \end{cases}$$

Satz 6: Der Körper $\mathbb{Q}$ ist abzählbar

Beweis: Reicht, $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_{+;}$ $\Phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ durch $\Phi(n) := \phi(n), \Phi(0) := 0 ;\ \Phi(-n) := -\phi(n)$ (mit $n \in \mathbb{N}$).

1	2	3	4	5
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$

Satz 7: Der Körper $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Beweis durch Widerspruch, basiert auf Satz 5

Definition:

- A, B heißen **gleichmächtig**, wenn $\exists$ eine bijektive Abbildung $A \to B$
- B hat eine **größere Mächtigkeit** als A, wenn A zu einer Teilmenge von B gleichmächtig ist, B aber zu keiner Teilmenge von A.

Beispiel: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sind gleichmächtig, $\mathbb{R}$ dagegen hat eine größere Mächtigkeit.

3. Komplexe Zahlen

Lösbarkeit $z^2 = -1$;

Cardano (1545), Euler (1707-1783), Hamilton (1805-1865)

3.1 Der Körper $\mathbb{C}$

Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$

$z^2 + 1 = 0$ wird lösbar: Lösung = i; $x, y \in \mathbb{R}$, $x + i\,y \in \mathbb{C}$;

$z^2 := -1$;

$z = x + i\,y$, $w = u + i\,v$;
$\rightarrow z + w = (x+u) + i\,(y+v)$, $z \cdot w = (x\,u - y\,v) + i \cdot (x\,v + y\,u)$;

__Bemerkung:__ $\mathbb{C}$ ist abgeschlossen bezüglich Addition und Multiplikation.

Gleichheit: $x + i\,y \stackrel{?}{=} u + i\,v$;
Beweis: $(x-u)^2 = -(v-y)^2$ funktioniert nur, wenn links und rechts 0 ist $\Rightarrow x = u$, $y = v$.

Definition (komplexe Zahlen durch Paare reeller Zahlen):

Eine komplexe Zahl ist ein Element $z := (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit Addition und Multiplikation

(A) (x,y) + (u,v) := (x + u, y + v)

(M) (x,y) * (u,v) := (xu - yv, vx + yu)

Satz: $\mathbb{C}$ mit (A) und (M) bilden einen Körper. Im Körper hat $z^2 = -1$ zwei Lösungen, i und –i.

Beweis: $a \cdot z = b$, dabei $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ und $a \neq (0,0)$

Behauptung: (1,0) wirkt als Eins in $\mathbb{C}$, d.h. $(1,0) \cdot b = b \quad \forall\, b \in \mathbb{C}$

Beweis: durch Nachrechnen

Definition: Für $a = (a_1, a_2) \neq (0,0)$ $\quad \dfrac{1}{a} := \left(\dfrac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, -\dfrac{a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right)$.

Dann gilt: $a \cdot \dfrac{1}{a} = (1,0)$; $(a_1, a_2) \left(\dfrac{a_1}{N,} - \dfrac{a_2}{N} \right) = \left(\dfrac{a_1^2 + a_2^2}{N}, 0 \right)$

Daraus: $z = \dfrac{1}{a} \cdot b$;

__Bemerkung__: $\mathbb{R}$ ' $\subset$ ' $\mathbb{C}$, $(x, 0)$ kann man addieren und multiplizieren wie $\mathbb{R}$.
$\{(x,0) | x \in \mathbb{R}\}$ bilden einen zu $\mathbb{R}$ __isomorphen__ Unterkörper von $\mathbb{C}$.
Statt $(x, 0)$ schreibt man x, statt $(1, 0)$ schreibt man 1; $z + 0 = z$; $z \cdot 1 = z$;

Imaginäre Einheit

Darunter versteht man $i := (0,1)$.

Das Quadrat ist $i^2=(-1{,}0)$. Somit sind i und –i Lösungen der Gleichung $z^2=-1$.

$(0\,,\,1)\cdot(0\,,\,1)=(-1\,,\,0)$

Bemerkung: $(x\,,\;y)=(x\,,\,0)+(0\,,\,1)\cdot(\,y\,,\,0)\;;\quad x\,,\;y\in\mathbb{R}$

$z=x+i\;y\,,\;\; z\in\mathbb{C}$

x = Realteil , y = Imaginärteil von z, $x=\Re\;z\,,\;y=\Im\;z$

Konjugation

Für $z=x+i\;y$ setzt man $\overline{z}:=x-i\;y$. Es gilt:

a) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}\,,\;\;\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$

b) $z+\overline{z}=2\cdot\mathrm{Re}\;z\,,\quad z-\overline{z}=2\,i\cdot\mathrm{Im}\;z$

c) $\overline{z}=z\Rightarrow\; z\in\mathbb{R}$

d) $z\cdot\overline{z}=x^2+y^2\;\;\in\mathbb{R}\;\;\wedge\;\;\geq 0$

Betrag

$|z|:=\sqrt{z\,\overline{z}}=\sqrt{x^2+y^2}$

a) $|z|>0$

b) $|\overline{z}|=|z|$

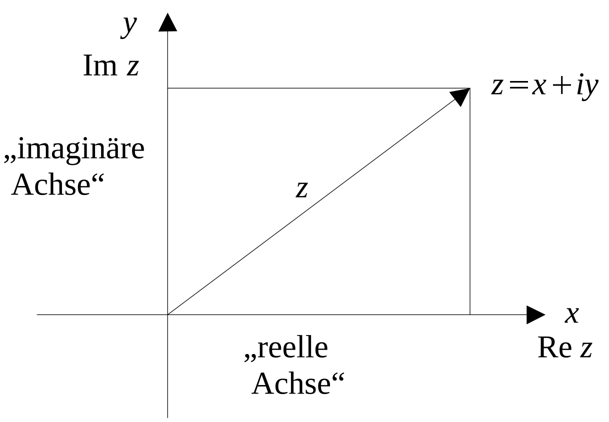
c) $|\mathrm{Re}\;z|\leq|z|\,,\,|\mathrm{Im}\;z|\leq|z|$

d) $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|$

e) $|z+w|\leq|z|+|w|$ (**Dreiecksungleichung**)

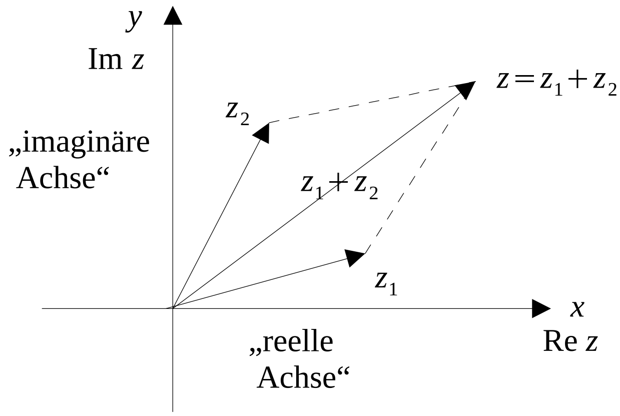
Beweis von e): $|z+w|^2=(\,z+w)\,(\,\overline{z}+\overline{w})=z\;\overline{z}+z\;\overline{w}+\overline{z}\;w+w\;\overline{w}\leq|z|^2+2\;|z\;\overline{w}|+|w|^2=(\,|z|+|w|)^2$;

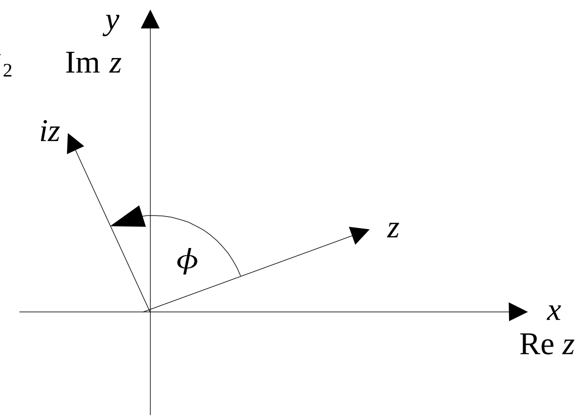
3.2 Komplexe Zahlenebene



Addition in $\mathbb{C}$ $\hat{=}$ Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$.

Multiplikation $z\rightarrow r\;z=r\;x+i\cdot r\;\;y$ bedeutet Streckung um den Faktor r,
Multiplikation $z\rightarrow i\;z=ix-\,y=-\,y+i\;x$ bedeutet eine Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn





3.3 Algebraische Gleichungen in $\mathbb{C}$

Satz: Jede quadratische Gleichung $z^2 + a\ z + b = 0,\quad a\ ,\ b \in \mathbb{C}$ besitzt mindestens eine Lösung.

Beweis: $z^2 + a\,z + b = \left(z + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4} = 0$

$z^2 = c \Leftrightarrow x^2 - y^2 = \mathrm{Re}\, c$

$z^2 = x + iy \Leftrightarrow 2xy = \mathrm{Im}\, c$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(|c| + \mathrm{Re}\, c)},\ y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(|c| + \mathrm{Re}\, c)}$

$z_{1,2} = \frac{-a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$

$\sqrt{\ }$ eine der Lösungen von $z^2 = a^2 - 4b$

Fundamentalsatz der Algebra: Jede Gleichung $z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0 \quad (n > 0)$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ besitzt in $\mathbb{C}$ mindestens eine Lösung.

4. Funktionen

Definition: komplexwertige Funktion $f(x) \rightarrow c$

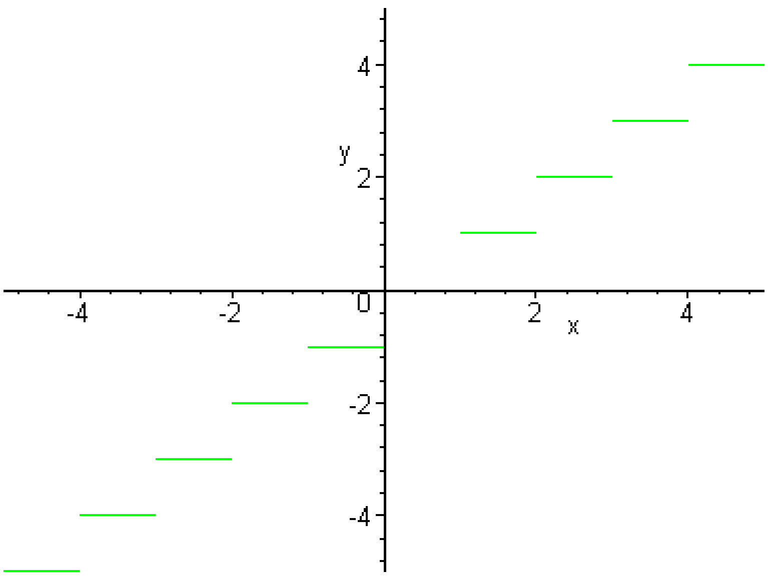
$$f(c)=\begin{cases} 1 \text{ für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ für } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Definition (Graphen) von f: $G(f):=\{x, f(x) | x \in X\}$

Definition: Monotonie: Sei $x \subset \mathbb{R}$ ¿ $f: x \rightarrow \mathbb{R}$ heißt monoton wachsend (fallend), wenn $\forall x_{1,} x_2 \in X \wedge x_1 < x_2 : f(x_1) \leq (\geq) f(x_2)$

Ohne = heißt f streng monoton wachsend (fallend)

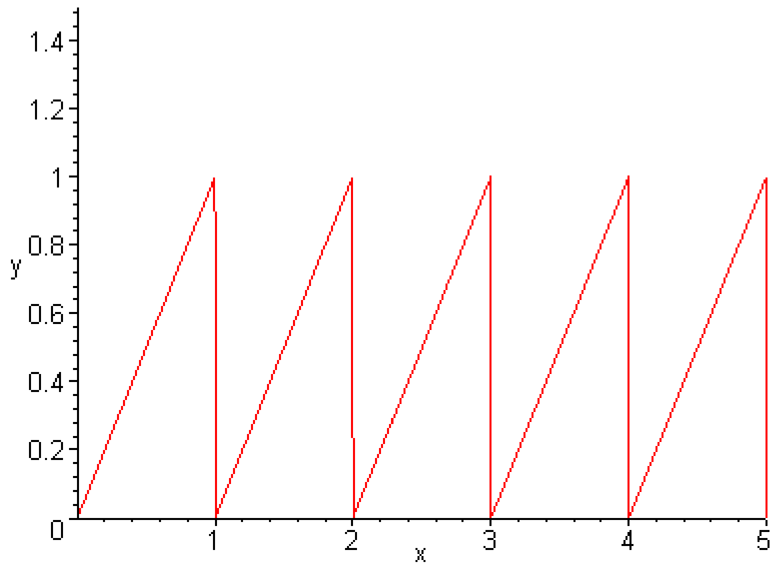
1. Beispiel:



$f(x)=[x]$

Gauß-Klammer: monoton, aber nicht streng monoton

2. Beispiel:



Sägezahnfunktion: nicht monoton

Algebraische Operationen: zu $f, g: \ X \to C$ def.

$$f+g\ ,\ f \cdot g\ ,\ \frac{f}{g} \text{ auf } \{x \in X \mid g(x) \neq 0\}$$

punktweise

$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$

$(f \cdot x)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Zusammensetzung von Funktionen

$f: X \to \mathbb{C}$

$G: Y \to C: x \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \mathbb{C}$

$g \circ f: X \to C$

$(g \circ f)(x) := g(f(x))$

Beispiel:

$f(x) = x^3; g(u) = \sin u$

$(g \circ f)(x) = \sin x^3$

$(f \circ g)(x) = x^3 \sin x$

Beispiel: $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \dfrac{-d}{c} \right\}$

$c \neq 0, D := a\,d - b\,c \neq 0$

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$

$$T(z) = \frac{a}{c} - \frac{D}{c} \frac{1}{cz+d}$$

Mit $L_1(z):=cz+d, I(w):=\frac{1}{w}$

$L_2(u):=\frac{-D}{c}u+\frac{a}{c}$

$T=L_2\circ I\circ L_1$

$T(z)=L_2(I(L_1(z)))$

Umkehrung einer Funktion

Sei $f\colon X\to\mathbb{C}$ injektiv , $X\subset\mathbb{C}$

$g\colon f(x)\to\mathbb{C}$, $g(f(x))=x$

Beispiel: $f=+\sqrt{x}\Leftrightarrow g=x^2$ $g(f(x))=x$ Umkehrfunktion zu f

$z\cup f$

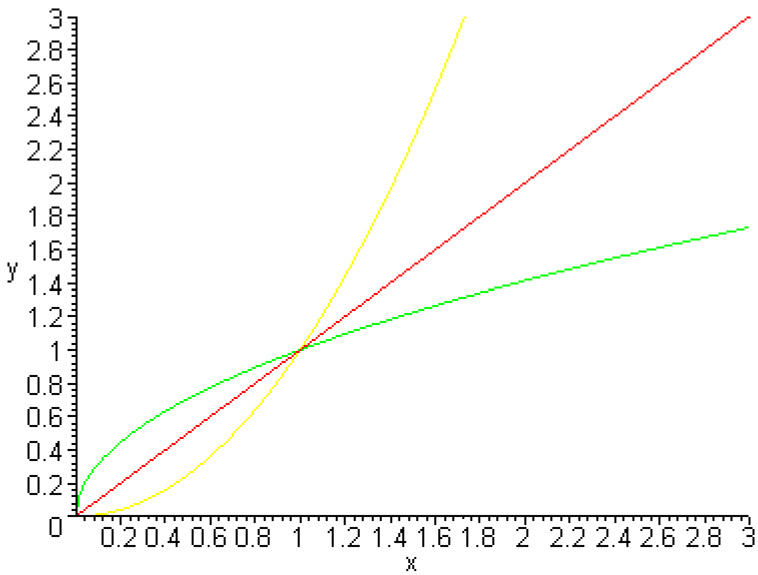
Für $f, x\subset\mathbb{R}$:

$G(y):=\{y,x\,|\,y=f(x), x\in X\}$

entsteht aus Graph $G(f)=\{(x,y), y\subset f(x)\}$ durch Spiegelung an der Diagonalen des $\mathbb{R}^2$

Beispiel: $f=+\sqrt{x}\Leftrightarrow g=x^2; g(f(x))=x$

$f=x^n\Leftrightarrow g=x^{1/n}$



4.2 Polynome

Analysis:

$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0,\quad a_k\in\mathbb{C}$

Ist $a_n\neq 0$ heißt n = Grad des Polynoms, a_n heißt **Leitkoeffizient**

$f=0\Leftrightarrow a_k=0\quad\forall k$

„f hat den Grad <= n“ schließt ein f = 0.

Definiton: Menge aller Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$: $\mathbb{C}[x], \mathbb{R}[x]$.

Satz: Summen und Produkte von Polynomen sind wieder Polynome.

$$f(x)=a_n x^n+...+a_0, g(x)=b_m x^m+...+b_0$$

$$(fg)(x)=c_{m+n} x^{m+n}+...+c_1 x+c_0$$

$$c_k=\sum_{r+s=k} a_r b_s$$

Abspaltung von Linearfaktoren

Definition: $\alpha \in \mathbb{C}$ heißt **Nullstelle** von f wenn $f(\alpha)=0$

Satz: $\alpha \in \mathbb{C}$ Nullstelle von f, so ist f durch x-a teilbar: $f(x)=(x-\alpha)q(x), q \in \mathbb{C}[x]$
Grad q = Grad f - 1, q ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Königsberger.

Hat q auch eine Nullstelle, kann man erneut Linearfaktoren abspalten. Wenn Grad $f \leq n$

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)....(x-\alpha_n)$$

Folgerung: Ein Polynom $\neq 0$ vom Grad n hat höchstens n Nulllstellen.

Definition: Ist f durch $(x-\alpha)^k$, aber nicht durch $(x-\alpha)^{k+1}$ teilbar, heißt α eine **k-fache Nullstelle von f**.

Beispiel: $f=(x-1)^2$ hat bei 1 eine 2-fache Nullstelle.

Identitätssatz

Satz: Stimmen die Werte von $\begin{aligned} f(x)&=a_{nx}^n+...a_1 x+a_0 \\ g(x)&=b_n x^n+...b_1 x+b_0 \end{aligned}$
an n+1 Stellen überein $\Rightarrow a_k=b_k$ für k = 0, ..., n und somit f(x) = g(x) $\forall x \in \mathbb{C}$.

Beispiel: f = ax + b, g = cxd

Beweis: f - g hat n + 1 verschiedene Nullstellen, Grad $\leq$n $\rightarrow f-g=0$

Bemerkung: $f=g \Leftrightarrow f(x)=g(x) \forall x \in \mathbb{C} \Leftrightarrow a_k=b_k \forall k \in (0,\ldots,n)$

Bemerkung: *<u>Methode des Koeffizientenvergleichs</u>*: $f(x)=g(x) \Rightarrow a_k=b_k$

Fundamentalsatz der Algebra

Satz (Linearfaktorzerlegung): Jedes nicht konstante Polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ besitzt
$f(x)=a(x-\alpha_i)^{k_1}.....(x-\alpha_s)^{k_s}$

Beweis: Königsberger

4.3 Rationale Funktionen

Definition: Eine rationale Funktion R ist eine Funktion, die sich mittels $f,g\in\mathbb{C}[x]$ als Quotient $R(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{g(z)=0\}$ darstellen läßt. Sind f,g teilerfremd, nennt man $D=\{z\in\mathbb{C}|g(z)\neq o\}$ den **vollständigen Definitionsbereich**.

Beispiel: $R(z)=\frac{z-1}{z^2-1}=\frac{1}{z+1}$

$D_{\text{vollst}}=\mathbb{C}\setminus\{-1\}$

$R(1)=\frac{1}{2}$

Defintion (Pole): $\alpha\in\mathbb{C}$ **n-facher Pol von R**, wenn es eine Darstellung $R=\frac{f}{g}$ mit $f(\alpha)\neq 0$ und g eine n-fache Nullstelle oder Stelle α hat.

Es gibt dann ein Polynom $h(\alpha)\neq 0$: $R(z)=\frac{f(z)}{(z-\alpha)^n h(z)}$

Man nennt $\frac{1}{(z-\alpha)^n}$ **Partialbruch**.

Lemma (Abspaltung des Hauptteils): I ist α ein n-facher Pol von R, so gibt es genau eine Zerlegung $R(z)=H(z)+R_0(z)$.

$$H(z)=\frac{a_n}{(z-\alpha)^n}+\frac{a_{n-1}}{(z-\alpha)^{n-1}}+....\frac{a_1}{z-\alpha}, a_n\neq 0$$

$R_0(\alpha)\neq 0$ rational.

Man nennt H den **Hauptteil von R** in α.

Beweis: Induktion

Bemerkung*: Wegen des Fundamentalsatzes der Algebra und den daraus folgenden Satz zur Linearfaktorzerlegung:* $(g\rightarrow)g(z)=(z-\alpha_1)^{n_1}...(z-\alpha_s)^{n_s}$

$R=\frac{f}{g}$

Außerdem nehmen wir an, dass $\alpha_{1,}...,\alpha_s$ keine Nullstelle des Zählers f ist (o.B.d.A.), Dann hat also $R=\frac{f}{g}$ genau $\alpha_{1,}...,\alpha_s$ Pole.

Seien $H_1,....,H_s$ die jeweiligen Hauptteile von R dann gilt:

R = $H_1+H_2+ ... +H_s+q$

q = rationale Funktion ohne Pole in $\mathbb{C}$ -> Polynomanteil.

Satz von der Partialbruchzerlegung: Jede rationale Funktion ist eine Summe ihrer Hauptteile und ihres Polynom–Anteils.

Herstellung der Partialbruchzerlegung (PBZ)

1. Geg. sei $R_{NM}(z)=\frac{F_n(z)}{G_M(z)}\begin{matrix}....N\\....M\end{matrix}$ Grade .

   M > N . Wenn $M\leq N$, dann $R(z)=Q(z)+\frac{F(z)}{G(z)}$ Grad F < Grad G; Q(z) = Polynom

2. Man bringt $G_M(z)$ in die Form $G_M(z)=(z-\alpha_i)^{n_i}.....(z-\alpha_s)^{n_s}$, $n_1+....+n_s=M$

3. Für jeden Faktor $(z-\alpha_i)^{n_i}$ setzt man n_i Terme an:

   $\frac{a_{i1}}{(z-\alpha_i)}+\frac{a_{i2}}{(z-alpa_i)^2}+....\frac{a_{in_i}}{(z-\alpha_i)^{¿}}$ mit M unbekannen Parametern.

   $R_{NM}(z)=\frac{F_N}{G_M}=Z_{PBZ}(z)$

   $F_N(z)=Z_{PBZ}(z)\cdot G_M(z)$

Beispiel: $R(z)=\frac{z+1}{z(z-1)^2}$

$$R(z)=\frac{a}{z}+\frac{b_1}{z-1}+\frac{b_2}{(z-1)^2}=Z(z)$$

$$\frac{z+1}{z(z-1)^2}=\frac{a}{z}+\frac{9b_1}{z-1}+\frac{b_2}{(z-1)^2}$$

$$z+1=a(z-1)^2+b_1z(z-1)+b_2z=z^2(a+b_1)+z(-2a-b_1+b_2)+a$$

$$a+b_1=0$$

$$1=a$$

$$1=-2a-b_1+b_2$$

$$a_1=1,b_1=-1,b_2=2$$

Rechentrick: $R(z)=\frac{a}{z}+\frac{b_1}{z-1}+\frac{b_2}{(z-1)^2}=\frac{z+1}{z(z-1)^2}$

und setze dann z = 0.

$$\lim_{z\to o} z\cdot R(z)=a=\frac{1}{1^2}=1$$

$b_{2:}\, x(z-1)^2$ und setze dann z = 1.

$$\lim_{z\to 1}(z-1)^2R(z)=\frac{z+1}{z}=\frac{2}{1}=2$$

$$b_2=2$$

Beispiel: $R(z)=\dfrac{2z^5-z^4+1}{z^4+6z^3+9z^2}$

Polynomdivision:

$$2z^5-z^4+1 \;:\; z^4+6z^3+9z^2 = 2z-13+\frac{60z^3+117z^2+1}{z^4+6z^3+9z^2}=3z-13+Q(z);$$

$$-(2z^5+12z^4+18z^3)$$

$$-13z^4-18z^3+1$$

$$-(13z^4-78z^3-117z^2)$$

$$60z^3+117z^2+1$$

$$z^4+6z^3+9z^2=z^2(z^2+6z+9)=z^2(z+3)^2$$

$$Q(z)=\frac{60z^3+117z^2+1}{z^2(z+3)^2}=\frac{a}{z}+\frac{b}{z^2}+\frac{c}{z+3}+\frac{d}{(z+3)^2}$$

$$Q(z)\cdot z^2|_{z=0}=\frac{1}{q}=b$$

$$Q(z)(z+3)^2|_{z=-3}=\frac{60\cdot(-3)^3+117\cdot(-3)^2+1}{(-3)^2}=\frac{-566}{9}=d$$

$$60z^3+117z^2+1=a\,z(z+3)^2+\frac{1}{9}(z+3)^2\,c\,z^2(z+3)-\frac{566}{9}z^2$$

$$z^3: 60=a+0$$

$$z^1: 0=9a+\frac{2}{3}\rightarrow a=\frac{-2}{27},\, c=\frac{1622}{27}$$

5. Folgen

5.1 Konvergenz von Folgen

Definition: **Folge komplexer Zahlen**, Folge in $\mathbb{C}$, ist $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$. Ist $f(n)=a_n$, schreibt man (a_n) oder a_1, a_2, a_3,......

Definition: Eine Folge (a_n) **konvergiert**, $\exists a\in\mathbb{C}\colon\forall\epsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\colon|a_n-a|<\epsilon\quad\forall n>N$
a heißt **Limes** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ oder $a_n\to a$ für $n\to\infty$. Folge(a_n) mit a = 0 **Nullfolge**
a_n **Folgenglieder**: $K_\epsilon(a):=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-a|<\epsilon\}$ Kreisscheibe mit Mittelpunkt a und Radius ϵ

Definition: ϵ-Umgebung von $a\in\mathbb{C}$

Definition: $U\supset K_\epsilon(a)$ **Umgebung von a**.

Bemerkung: $a\in\mathbb{R},\epsilon$-Umgebung $I_\epsilon(a):=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x-a|<\epsilon\}=(a-\epsilon,a+\epsilon)$

Definition: Gegeben seien Aussagen A(n) $\forall n\in\mathbb{N}$. **Fast alle** A(n) sind nichtig, wenn $\exists N\colon A(n)$ gilt für n > N.

Definition' (Konvergenz): (a_n) konvergent $\Leftrightarrow$ jede Umgebung von a enthält fast alle a_n

Beispiele:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^s}=0\quad\forall s\in\mathbb{Q}_+$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad\forall a\in\mathbb{R}_+$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\quad n\in\mathbb{N}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{z^n}=0\,\forall k\in\mathbb{N}\wedge z\in\mathbb{C}\wedge|z|>1$

Beweis (3): $x_n:=\sqrt[n]{n}-1\geq 0$

$$n=(1+x_n)^n\geq 1+\binom{n}{2}x_n^2$$

$$n-1\geq\frac{n(n-1)}{2}x_n^2\Rightarrow x_n^2\leq\frac{2(n+1)}{n(n-1)}=\frac{2}{n}$$

$$x_n\leq\sqrt{\frac{2}{n}}\Rightarrow x_n<\epsilon$$

n > N := $\frac{2}{\epsilon^2}$

5.2 Rechenregeln

Regel I: $(a_n)\to a,(b_n)\to b$

a) $a_n+b_n\to a+b$

b) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

c) $b \neq 0$, so sind fast alle $b_n \neq 0$ und ergibt $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$

Beweis(c):

$\eta := \frac{1}{2}|b| > 0,$ wählen $N' : |b_n - b| < \eta \quad \forall\, \eta > N'$

$|b| = |b_n + b - b_n| \leq |b_n| + |b - b_n|$ (**Dreiecksungleichung**)

$|b_n| \geq |b| - |b_n - b| \Rightarrow |b_n| \geq 2\eta - \eta = \frac{1}{2}|b| > 0\, \forall\, n > N'$

$\epsilon \quad N \geq N'$

$|b_n - b| < \frac{1}{2}\epsilon |b|^2 \quad n > N$

Für n > N: $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n|\,|b|} < \frac{2 \cdot \frac{1}{2}\epsilon\,|b|^2}{|b| \cdot |b|} = \epsilon$

$\frac{1}{|b_n|} \leq \frac{2}{|b|}$ mit Regel (b) $\Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ ❑

Regel II: $(a_n) \to a$. Dann $|a_n| \to |a|, \bar{a}_n \to \bar{a}, \operatorname{Re} a_n \to \operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a_n \to \operatorname{Im} a$

Regel III: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b} = 1; \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{3n^2+2}{12n^2+\frac{6}{n^2}}} = \sqrt{\frac{3+\frac{2}{n^2}}{12+\frac{6}{n^2}}} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{12}} = \frac{1}{2}$

Bemerkung: $|a_n| \to |a|$ *daraus folgt nicht* $a_n \to a$; *Bsp:* $a_n = (-1)^n$

Sandwich-Theorem: Zu (a_n) gebe es konvergente Folgen (A_n) und (B_n) $A_n \leq a_n \leq B_n$ für fast alle n und lim A_n = lim B_n. Dann: (a_n) konvergent, lim a_n = lim A_n

Beispiel: $0 \leq a \leq b$, dann gilt: $\sqrt[n]{a^n + b^n} \to b$

Beweis: $b \leq \underbrace{\sqrt[n]{a^n + b^n}}_{>0} \underset{a=b}{\leq} b \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\to 1}$

Definition: (a_n) und (b_n) $\neq 0$ heißen **asymptotisch gleich**, falls $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1, a_n \underset{n\to\infty}{\simeq} b_n$

Bemerkung: Asymptotisch gleiche Folgen haben gleiches Konvergenzverhalten:

Beispiel: $a_n = n$, $b_n = n + 1$, $\frac{a_n}{b_n} \to 1$

Beispiel: $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\simeq} \frac{1}{2\sqrt{n}}$

5.3 Monotone Folgen

Definition: (a_n) beschränkt, $\exists\ s \in \mathbb{R} : |a_n| \le s \quad \forall\ n$

Lemma: Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Königsberger

__Bemerkung__: Beschränktheit reicht __nicht__ für Konvergenz: $a_n = (-1)^n$

Definition: $(a_n) \in \mathbb{R}$
a) **monoton wachsend** $a_n \le a_{n+1} \quad \forall\ n$
b) **monoton fallend** $a_n \ge a_{n+1} \quad \forall\ n$

Satz: Jede beschränkte, monotone Folge (a_n) konvergiert:
a) eine wachsende $\to \sup A, A := \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$
b) eine fallende $\to \inf A$

Beweis: s := sup A; da s kleinste obere Schranke, $\forall\ \epsilon>0 \exists\ a_N$ mit $s-\epsilon<a_N$

$s-\epsilon<a_N \le a_n \le s \qquad n>N$

5.5 Satz von Bolzano-Weierstraß

Definition: $h \in \mathbb{C}$ **Häufungswert der Folge** $(a_n) \in \mathbb{C}$, wenn jede Ungleichung $K_\epsilon(h)$ unendlich viele a_n enthält $|h-a_n|<\epsilon$ für unendlich viele n

Beispiel:

1. Konvergente Folge $(a_n) \to a$, a = Häufungswert
2. $a_n = (-1)^n$ +1, -1 Häufungswerte

Definition: $h \in \mathbb{C}$ **Häufungswert** (a_n) $K_\epsilon(h)$ wenn h unendlich viele Folgenglieder enthält.

Satz (Bolzano-Weierstraß), 1. Fassung: Jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ besitzt einen Häufungswert.
Jede beschränkte Folge $(a_n) \in \mathbb{R}$ hat einen größten Häufungswert h^* und einen kleinesten h_*:
$\forall\ \epsilon>0\ :\ a_n<h^*+\epsilon$ für fast alle n
$\forall\ \epsilon>0\ :\ a_n>h^*-\epsilon$ für fast alle n
$h^* := \lim\sup a_n, h_* = \lim\inf a_n$

Beweis: $\mathbb{R}$ $(a_n) \in \mathbb{R}$
Rekursive Intervallschachtelung $[A_k, B_k]$
$(I_k)\ a_n \in [A_k, B_k]$ für unendlich viele n

$(z_k)\, a_n \leq B_k$ für fast alle n

$[A_1, B_1]$ enthält alle a_n

$k \to k+1$: $M = \frac{1}{2}(A_k + B_k)$ $[A_{k,} B_k]$

$[A_{k+1}, B_{k+1}] := \begin{cases} [A_k, M] & \text{falls } a_n \leq M \text{ für fast alle n} \\ [M, B_k] & \text{andernfalls} \end{cases}$

h^* ist Häufungswert mit $a_n < h^* + \epsilon$

$\epsilon > 0$, wähle k so, daß $[A_k, B_k] \subset I_\epsilon(h^*) = (h* - \epsilon, h9* + \epsilon)$

(1_k) enthält $I_\epsilon(h^*)$ unendlich viele a_n

(2_k) $a_n \leq B_k < h^* + \epsilon$ für fast alle n

Noch zu zeigen daß kein $h' > h^*$ existiert das Häufungswert ist

$\epsilon_0 := \frac{1}{2}(h' - h^*)$ $a_n < h^* + \epsilon_0 = h' - \epsilon_0$ für fast alle n, $I_{\epsilon_0}(h')$ enthält höchstens endlich viele Folgenglieder. ❑

Definition: $(a_n) \in \mathbb{C}, (n_k) \in \mathbb{N}$ streng monoton wachsende Folge $k \to a_{n_k}$ $k \in \mathbb{N}$;
$(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ **Teilfolge** von (a_n).

Lemma: Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert und besitzt den gleichen Grenzwert.

Lemma: $h \in \mathbb{C}$ ist ein Häufungswert der Folge (a_n) ⇔ h ist Grenzwert einer konvergenten Teilfolge (a_{nk})

Beweis: Königsberger

Satz (Bolzano-Weierstraß), 2. Fassung: Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

5.6 Konvergenzkriterium von Bolzano-Cauchy

Erlaubt ohne Bezug auf Grenzwert zu bestimmen, ob eine Folge konvergiert.

Konvergenzkriterium von Cauchy: $(a_n) \in \mathbb{C}$ konvergiert ⇔
$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \epsilon$ falls $n > N \wedge m > N$

Beweis: B.-W.

Definition: Eine Folge $(a_n) \in \mathbb{C}$ **Cauchy-Folge** oder **Fundamentalfolge**
$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \epsilon$ falls $n > N \wedge m > N$

5.7 Erweiterte Zahlengerade

$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

$[a, \infty] := \{x \in \bar{\mathbb{R}} | a \leq x \leq \infty\}$

Definition: $(K, \infty], [-\infty, k)$ Mit $k \in \mathbb{R}$ Umgebungen von ∞ bzw. $-\infty$

Definition: $(a_n) \in \mathbb{R}$

lim $a_n := \infty$ falls jede Umgebung (K, ∞) fast alle a_n enthält

lim $a_n := -\infty$ falls jede Umgebung (∞, K) fast alle a_n enthält

⇒ **Bestimmt divergent** (**uneigentlich konvergent**)

lim sup $a_n := \infty$ falls jede Umgebung $(k, \infty]$ unendlich viele a_n enthält

lim inf $a_n := -\infty$ falls jede Umgebung $[-\infty, k)$ unendlich viele a_n enthält

Beispiel: $a_n = n \quad \to \infty$

$a_n = -n \quad \to \infty$

$a_n = (-1)^n n$ divergiert, aber nicht bestimmt.

6. Reihen

Reihen sind Folgen $a_n = s_n - s_{n-1}$

6.1 Konvergenz von Reihen

Gegeben sei Folge $(a_n) \in \mathbb{C}$

Definition: Durch $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \Leftrightarrow \{a_{i,}\, i=1,\ldots,n\}$ wird (a_n) die Folge s_n zugeordnet.
(s_n) heißt **unendliche Reihe**.

(s_n) konvergiert $\Leftrightarrow$ Reihe konvergiert.

$s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ Summe oder Wert der Reihe $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

***Bemerkung**: $a_k \in \mathbb{R}$, (s_n) bestimmt $\Rightarrow \infty$ oder $-\infty$ divergiert ; $\sum a_k = \infty$, $\sum a_k = -\infty$*

Beispiel 1: Geometrische Reihe: $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \text{ da } s_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{1-z}$$

Beispiel 2: Harmonische Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Beweis: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{n}$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \ldots + \frac{1}{16} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots \Rightarrow \text{keine Nullfolge}$$

Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

PBZ: $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$n \to \infty \quad s_n \to 1$

6.2 Konvergenzkriterium (KK) von Cauchy:

$\sum a_n$ konvergiert $\Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n > m \geq N \qquad |s_n - s_m| = |a_{m+1} + \ldots + a_n| < \epsilon$

Folgerungen:

I. Eine Reihe konvergiert höchstens dann, wenn die Folge ihrer Glieder eine Nullfolge ist.

$\underbrace{\sum \frac{1}{n}}_{\text{Nullfolge}}$, $\underbrace{\sum n^2}_{\text{keine Nullfolge}}$

II. Das Ändern endlich vieler Summanden einer Reihe ändert nicht ihre Konvergenz oder Divergenz.

Majoranten-KK: Ist $|a_n| \leq |c_n| \quad \forall\, n$ und konvergiert $\sum_{n=p}^{\infty} |c_n|$, so konvergiert auch $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ und es gilt $\left|\sum_{n=p}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=p}^{\infty} |c_n|$

Definition: $\sum_{n=p}^{\infty} c_n$ heißt **Majorante** von $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$.

Beweis: $\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, N : \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |c_k| < \epsilon$ falls $n > m \geq N$

Somit erfüllt $\sum a_k$ die Cauchy-Bedingung, konvergiert also.

Aus Rechenregeln für Folgen, s.K.

Beispiel 1: $a_{n,} |a_n| \leq 1$: Es konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für $|z| < 1$, da $\sum z^n$ Majorante ist.

Beispiel 2: Beh: $a \in \mathbb{R} \quad 0 \leq a < 1$. Es divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-a}$

$\frac{1}{n-a} > \frac{1}{n}$ harmonische Reihe divergiert.

2a) Reihe mit reelen, nichtnegativen Gliedern

Satz: Reihe mit Gliedern $a_n \geq 0$ konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist: $\sum^{N} a_n < \infty$

Beispiel: $s \in \mathbb{Q}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \begin{cases} \text{konvergent } s > 1 \\ \text{divergent } s \leq 1 \end{cases}$

2b) Alternierende Reihen mit reellen Gliedern.

Definition: Reihe heißt **alternierend**, wenn die Glieder abwechselnde Vorzeichen haben

Beispiel: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ (Leibnitz-Reihe)

Konvergenzkriterium von Leibniz:
Sei (a_1) eine monoton fallende Nullfolge. Dann gilt:

1. $s=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergiert
2. $\left|s-\sum_{n=0}^{k}(-1)^n a_n\right|\leq a_{k+1}$

d.h $s\approx s_k$ bis auf Fehler, der höchstens so groß ist wie der Betrag des 1. weggelassenen Summanden.

Beispiel: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4.....}=\ln 2$ alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

III. Absolute Konvergenz

Definition: Eine Reihe $\sum a_n$ mit $a_n\in\mathbb{C}$ heißt **absolut konvergent**, falls $\sum|a_n|$ konvergiert.

Folge: Absolut konvergente Reihe ist nach dem Majorantenkriterium konvergent.

Beweis: Konvergenz ≠ abs. Konvergenz

Es gilt die **verallg. Dreiecksungleichung**

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

Wurzelkriterium

Wurzelkriterium:
Sei $L=\lim\sup\sqrt[n]{|a_n|}$. Für $\sum a_n$ gilt dann

1. $L<1$: konvergiert absolut
2. $L>1$: divergiert
3. $L=1$: Konvergenzfrage unentschieden

Beweis: Folgt aus Majorantenkriterium

***Bemerkung**: Wenn $\sqrt[n]{|a_n|}$ konvergiert, so ist $L=\lim\sqrt[n]{|a_n|}$*

1. Beispiel: $\sum_{N=1}^{\infty}nx^n$ konvergiert, wenn $|x|<1$

$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|nx^n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot|x|=|x|$ konvergiert, da x<1

2. Beispiel: $\sum_n \left(\frac{-5}{4}\right)^n \quad L=\frac{5}{4}$ divergiert

Quotientenkriterium

Quotientenkriterium:

Es existiere $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =: q$.

1. $q<1 \Rightarrow$ konvergiert $\sum a_n$ absolut
2. $q>1 \Rightarrow$ divergiert
3. $q=1$ unentschieden

Beweis: Wurzelkriterium

Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ konvergiert

Beweis: $q:=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{n!(n+1)}\right|$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}=0<1$ q.e.d

Beispiel: a < 1

$1+a^3+a^2+a^5+a^4+a^7+\ldots.$

$$a_n=\begin{cases} a^{n-1} & \text{ungerade} \\ a^{n+1} & \text{gerade}\end{cases}$$

Wurzelkriterium: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^{n\pm1}}=a\cdot a^{\pm1/n}=a$

Konvergenz für a < 1

Quotientenkriterium: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=a^3$ oder a^{-1}

6.3 Der große Umordnungssatz

Satz: Konvergieren die Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$, dann konvergieren auch
$\sum(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha\sum a_n+\beta\sum b_n$.
$\sum \overline{a_n}=\overline{\sum a_n}$

***Bemerkung**: Aber: für unendliche Reihe gilt im Allgemeinen weder Assozitivgesetz, noch Kommutativgesetz.*

Beispiel 1: $(1-1)+(1-1)+(1-1)+1\ldots=0$

$1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\ldots=1$

Beispiel 2: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}....=S$

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+...=\frac{1}{2}s$$

Großer Umordnungssatz: Sei $\sum a_n$ eine absolut konvergente Reihe. Werden a_n auf endlich aber auch unendlich viele Reihen oder Summen so verteilt, daß jeder Summand in genau einer dieser Teilreihen auftritt, so gilt:
a) Jede Teilreihe konvergiert absolut
b) s_1, s_2, s_3,.... die Summen der Teilreihen, so konvergiert auch $\sum_k s_k$ absolut und es gilt: $\sum_k s_k=\sum_n a_n$

Beweis-Skizze:
a) Jede endliche Summe von Gliedern $|a_n|$ und damit auch jede endliche Summe von Gliedern der Teilreihe $\alpha:=\sum |a_n|$ beschränkt ist.
b) Abschätzung von endlichen Teilsummen. Sandwich-Theorem. q.e.d.

Umordungssatz: Jede Umordunung einer absolut konvergenten Reihe konvergiert ebenfalls absolut und hat denselben Wert.

Lemma: Jede konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe reeller Zahlen kann sowohl zu einer divergenten als auch zu einer konvergenten Reihe mit beliebig vorgegebenen $s\in\mathbb{R}$ als Summe umgeordnet werden.

Man nennt nicht absolut kovergente Reihen **bedingt kovergent**.

Beweis: Man erzeugt eine s definierende Intervallschachtelungen indem man abwechselnd so viele positive Glieder aufsummiert, bis man s überschreitet, und dann wieder soviele negative, bis man s unterschreitet

Definition: Multipliziert man jedes Glied der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ mit jedem Glied der der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$. So erhält man die Matrix (a_i b_k). Die Reihen $D_n=\sum_{i+k=n} a_i b_k=a_0 b_n+a_1 b_{n-1}+a_2 b_{n-2}+...+a_n b_0$ heißt **Cauchy-Produkt** der Reihen $\sum a_i$ und $\sum b_k$.

Multiplikationssatz: Das Cauchy-Produkt $\sum_{n=0}^{\infty} D_n$ absolut konvergenter Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergiert ebenfalls absolut und es gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} D_n=(\sum_0^{\infty} a_i)\cdot(\sum_0^{\infty} b_k)$

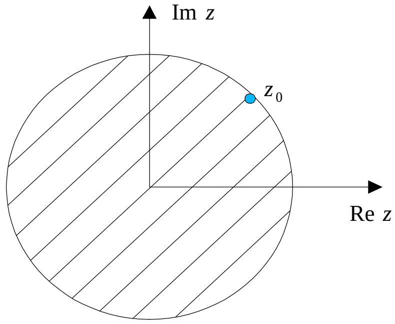
Beispiel: $\frac{1}{1-x^2}=(1+x+x^2+....)(1+x+x^2+...)=1+2x+3x^2+4x^3...=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ für $|x|<1$

6.4 Potenzreihen

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{nz}^{n}=a_0+a_1 z+a_2 z^2+....$$

I. Konvergenzkreis

Lemma: Konvergiert die Potenzreihe P in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $z_0 \neq 0$, so konvergiert sie absolut in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit $|z|<|z_0|$



Beweis: $\exists\, S$ mit $|a_n\, z_0^n| \le S \quad \forall\, n$

$$|a_n z^n|=|a_n z_0^n|\left|\frac{z}{z_0}\right|^n \le S\cdot q\ ,\quad q=\left|\frac{z}{z_0}\right|<1$$

Majorante: $S\cdot\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergiert daher.

Konv. P(z) für $|z|<|z_0|$. q.e.d.

Definition: $R=R(P):=\sup\{r\in\mathbb{R}|P(z)\,\text{mit}\,|z|=r\,\text{konvergiert}\}$

Satz: Die Potenzreihe P ist

a) $\forall\, z$ mit $|z|<R$ absolut konvergent

b) $\forall\, z$ mit $|z|>R$ divergent

R = R(P) heißt **Konvergenzradius** und $K_R(0)$ **Konvergenzkreis** von P.

Beweis: obiges Lemma, Supremumseigenschaft.

Satz: Formeln zur Berechnung des Kovergenzradius von $\sum_{nm=0}^{\infty} a_n z^n$

$R=\frac{1}{L}$ mit $L=\lim\sup\sqrt[n]{|a_n|}$ (*Cauchy Hadenard*)

$R=\frac{1}{q}$ mit $q=\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ falls der Grenzwert existiert. (*Euler*)

Bemerkung: *Über Konvergenz oder Divergenz auf den Rand* $\{z||z|=R\}$ *kann man keine allgemeine Aussage machen.*

z.B. Reihen a) $\sum_1^{\infty} z^n$ b) $\sum_1^{\infty}\frac{z^n}{n}$ c) $\sum_1^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ haben nach der Euler-Formel alle R=1.

Beweis: c) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2}\frac{n^2}{z^n}\right|=\lim_{n\to\infty}|z|\frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=|z|\Rightarrow$ konvergiert für $|z|<1\Rightarrow R=1$

Für $|z|=1$: a) div. b) z = 1 div. , z= -1 konv. c) konv.

Beispiel: Lückenreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu!}=z+z+z^2+z^6+z^{24}+...$$

$$a_n\begin{cases}1 & n=\nu!\\ 0 & n\neq\nu!\end{cases}$$

Behauptung: $R=1$

Beweis: $\sqrt[n]{|a_n|}=\begin{cases}0\\1\end{cases}$, lim sup $\sqrt[n]{|a_n|}=1$

$|z|>1$ $\Rightarrow$ Glieder <u>keine</u> Nullfolge $\Rightarrow$ divergiert

$|z|<1$ $\Rightarrow$ Majoranten $\sum_n z^n$ konv. $\Rightarrow$ konv.

Wichtige Reihen:

Experimentalreihe $E(z)=e(z):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

$$R=\infty,\ \frac{(n+1)!}{n!}\to n+1\to\infty$$

Logarithmusreihe $L(z):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n\ \ R=1,\frac{n+1}{n}\to 1$

Binominalreihe $s\in\mathbb{C}:B_s(z):=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{s}{n}z^n$

$$B_s(z)=1+sz+\frac{s(s-1)}{z!}z^2+\frac{s(s-1)(s-2)}{3!}z^3+....$$

Für s = 0,1,2,... $\binom{s}{n}=0\quad n>s$

$$B_s(z)=\sum_{n=0}^{s}\binom{s}{n}z^n=(1+z)^s\,\forall\ z\in\mathbb{C}$$

Für $s\neq 0,1,2$ R=1, da $\left|\frac{\binom{s}{n}}{\binom{s}{n+1}}\right|=\left|\frac{n+1}{s-n}\right|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1$

II. Multiplikation von Potenzreihen

Satz: Falls $f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$ und $g(z)=\sum_0^\infty b_n z^n$ für $f(z)\cdot g(z)=\sum_0^\infty d_n z^n$ mit

$d_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

III. Verhalten in Umgebung von 0

Reihenrest: $R_n(z)=\sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$

Lemma: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ habe einen Konvergenzradius R > 0. Dann gilt $\forall r, 0<r<R: \exists c\in\mathbb{R}$ mit $|R_n(z)|\leq c|z|^n$ für $|z|\leq r$. Fällt die Folge monoton, so ist $R\geq 1$ und ergibt $|R_n(z)|\leq|a_n|\frac{|z|^n}{1-|z|}$ für $|z|<1$

Satz: Ist $f(z)=\sum a_n z^n$ nicht alle a_n gleich Null sind, dann gibt es einen Kreis um O, der höchstens endlich viele Nullstallen von f enthält.

Identitätssatz: Die $f(z)=a_0+a_1 z+....$ $g(z)=b_0+b_1 z+.....$ mögen $R\neq 0$ haben. Ferner gebe es eine Punktfolge (z_k) mit $z_k\rightarrow 0$ und $z_k\neq 0\,\forall k$, so dass $f(z_k)=g(z_k)\forall k$

$\Rightarrow a_n=b_n \quad \forall n\in\mathbb{N}\cup\{\emptyset\}$

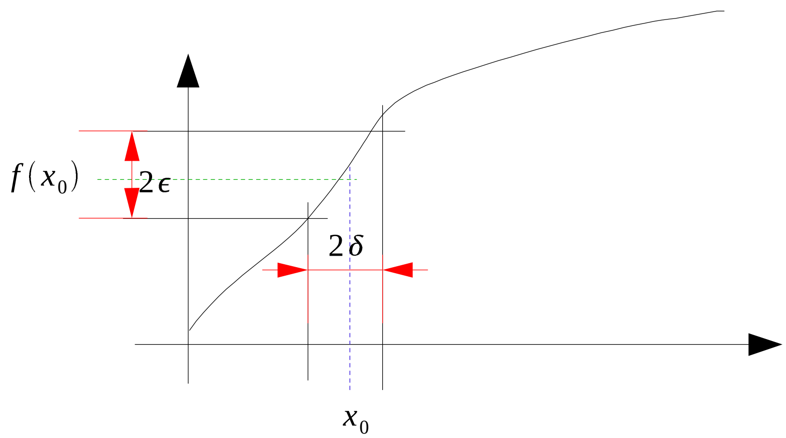
7. Stetige Funktionen, Grenzwerte

7.1 Stetigkeit

Definition: $f\colon D \to \mathbb{C}$ heißt stetig in $x_0 \in D$, wenn $\forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0$ gilt:
$\left|f(x) - f(x_0)\right| < \epsilon \quad \forall\ x \in D$ und $\left|x - x_0\right| < \delta$.
f heißt **stetig in D**, wenn f in jedem Punkt von D stetig ist.

Bemerkung: $D \subset \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{C}$.

Geometrische Deutung $D \subset \mathbb{R}$, f reell



$f(x_0) - \epsilon < y < f(x_0) + \epsilon$

Beispiel 1:

$f(z) = z^2$ auf $\mathbb{C}$ stetig.

$\frac{1}{z}$ für $z \neq 0$ stetig.

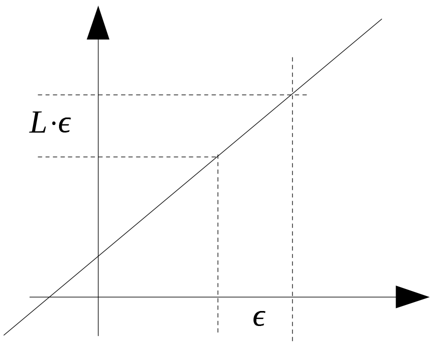
$|z|$ ist überall stetig.

Beispiel 2: Lipschitz-stetige Funktionen sind stetig.

Definition: $f\colon D \to \mathbb{C}$ heißt **Lipschitz-stetig** auf D, wenn $\exists\, L \in \mathbb{R} \colon \forall\, x, y \in D$
$|f(x) - f(y)| \leq L\ |x - y|$.

Beispiel für Lipschitz-stetige Funktionen:

a) $az + b \quad (L = |a|)$



b) $|f|, \bar{f}, \text{Re } f, \text{Im } f \quad L=1$

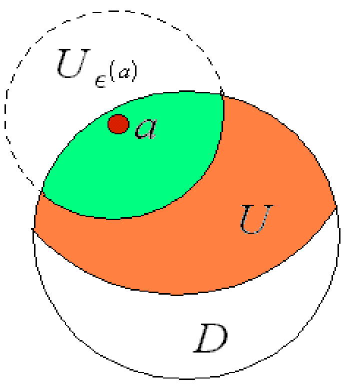
Beispiel 3: Dirichlet-Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x)=\begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ überall unstetig

Beispiel 4: Riemann-Funktion $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$f(x)=\begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{für } x=\frac{p}{q} \text{ mit teilerfremden } p,q \in \mathbb{N} \end{cases}$ ist an den irrationalen Stellen stetig und an den rationalen stellen unstetig.

Definition: Sei $a \in D$. Unter einer **D-Umgebung von a** oder auch **Umgebung von a in D** versteht man jede Teilmenge $U \subset D$, die eine Menge der Gestalt $U_\epsilon(a) \cap D$ umfasst. Dabei ist $U_\epsilon(a)$ eine ϵ-Umgebung von a.



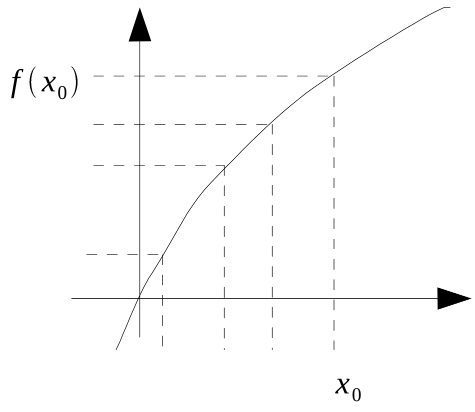
Bemerkung:

1. *$U \subset B \subset D$ ist auch D-Umgebung von a, wenn U dies ist.*
2. *Wenn U und V D-Umgebungen von a sind, dann ist auch $U \cap V$ D-Umgebung.*

Definition': $f: D \to \mathbb{C}$ ist stetig in $x_0 \in D \vdots |f(x)-f(x_0)| < \epsilon \quad \forall x \in U$

Folgenkriterium f. Stetigkeit:
$f\colon D \to \mathbb{C}$ ist stetig in $x_0 \in D \Leftrightarrow \forall (x_n) \in D$ mit $x_n \to x_0$ gilt:
$f(x_n) \to f(x_0)$

Beweis: Folgt aus Definition



7.2 Rechnen mit stetigen Funktionen

Regel I: $f,g\colon D \to \mathbb{C}$ stetig in $x_0 \in D$ dann auch für $f+g$, $f \cdot g$

Ist $g(x_0) \neq 0$ so ist $\frac{f}{g}$ in einer D-Umgebung von x_0 definiert und stetig in x_0 .

Regel II: $D \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} \mathbb{C}$ seien f stetig in x_0 und g stetig in $f(x_0) = y_0$ Dann gilt: $g \cdot f$ stetig in x_0.

Regel III: die $f\colon [a,b] \to R$ streng monoton und in $x_0 \in [a,b]$ stetig. Dann ist auch die Umkehrfunktion h stetig in $y_0 = f(x_0)$.

Beispiel: Da x^n stetig, $g(x) = \sqrt[n]{x}$ $n = 2,3,...$ auf $[0,\infty)$ stetig ist

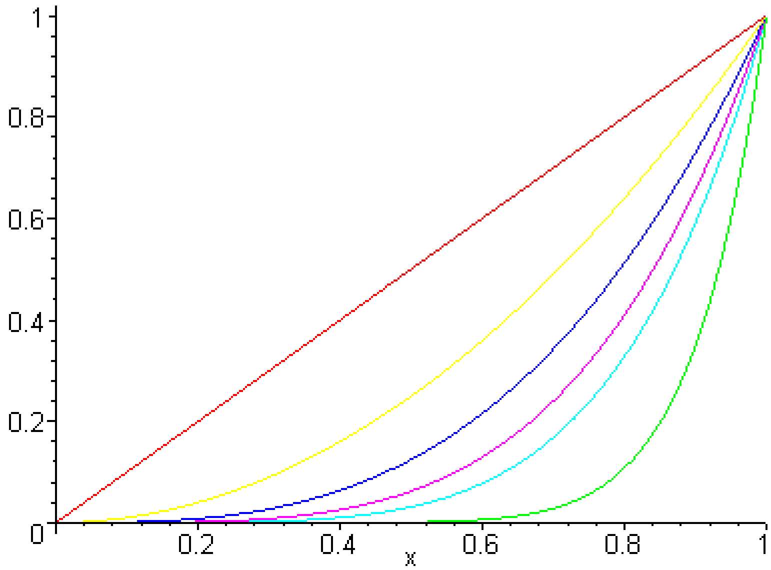
7.3 Erzeugung stetiger Funktionen durch normalkonvergente Reihen

Definition: Gegeben eine Folge von $f_n\colon D \to \mathbb{C}$.
Punktweise konvergent, wenn die $(f_n(x))$ der Funktionswerte $\forall x \in D$ konvergiert.
Gegebenenfalls wird durch $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $x \in D$ sog. **Grenzfunktion** $f\colon D \to \mathbb{C}$ definiert.

***Bemerkung**: Auch wenn alle f_n stetig sind, muss f nicht stetig sein!*

Beispiel: $f_n(x) = x^n$ $x \in [0,1]$

$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ f unstetig auf [0,1]



Definition: Funktion $f: D \to \mathbb{C}$ heisst **beschränkt**, $\exists s \in \mathbb{R}: |f(x)| \leq s \quad \forall x \in D$

Man setzt $\|f\|_D := \begin{cases} \sup\{|f(x)|, x \in D\} & \text{falls } f \text{ beschränkt} \\ \infty & \text{andernfalls} \end{cases}$

$\|f\|_D$ **Norm von f** bzgl D. $\|f\|$.

Bemerkung: *Werden sehen, dass jede stetige Funktion $f: D \to \mathbb{C}$ auf einem kompakten D eine endliche Norm besitzt.*

Rechenregeln für Funktionen mit endlicher Norm:

1. $\|f\|_D = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in D$
2. $\|c f\|_D = |c| \cdot \|f\|_D, \quad c \in \mathbb{C}$
3. $\|f+g\|_D \leq \|f\|_D + \|g\|_D$ (Dreiecksungleichung)

Beweis: $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$

Definition: Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ von Funktionen auf D heißt **normal konvergent auf D**, wenn jeder Summand f_n auf D beschränkt ist und die Reihe der Norm bezgl. D konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_D < \infty$$

Lemma: Eine Potenzreihe $\sum a_n z^n$ mit Konvergenzradius R > 0 konvergiert normal in jedem Kreis $K_r(0)$ mit r > R.

Beweis: $f_n(z) = a_n z^n$

$\|f_n\|_{K_r(0)} = |a_n| r^n$

Die Potenzreihe konvergiert absolut innerhalb des Kreises $K_R(0)$, $\sum |a_n| r^n < \infty$ ❑

Beispiel: Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x-n)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

Beweis-Skizze: $I_n [a,b]$ kann man n finden.

Damit bekommt man eine Majorante $\frac{\sum 1}{n^2}$

Satz: Die Reihe $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergiere normal auf D. Damit gilt: Ist f_k stetig $\forall\, k$ in $X_0 \in D$, so ist auch f stetig in x_0.

***Bemerkung**: Erst bei normaler Konvergenz bleibt Stetigkeit erhalten.*

Beweis: Zu $\epsilon > 0$ wähle man zunächst n so gross, dass $\sum_{k=n+1}^{\infty} \| f_k \|_D < \frac{1}{3} \epsilon$

$\forall\, x \in D$ gilt $|f(x) - f(x_0)| \leq \left| \sum_1^n f_k(x) - \sum_1^n f_k(x_0) \right| + \sum_{n+1}^{\infty} |f_k(x)| + \sum_{n+1}^{\infty} |f_k(x_0)|$

$\leq \left| \sum_1^n f_k(x) - \sum_1^n f_k(x_0) \right| + \frac{2}{3} \epsilon$

Wegen der Stetigkeit von $\sum_1^n f_k$ $\exists$ Umgebung U von x_0 in $D \colon \forall\, x \in U$

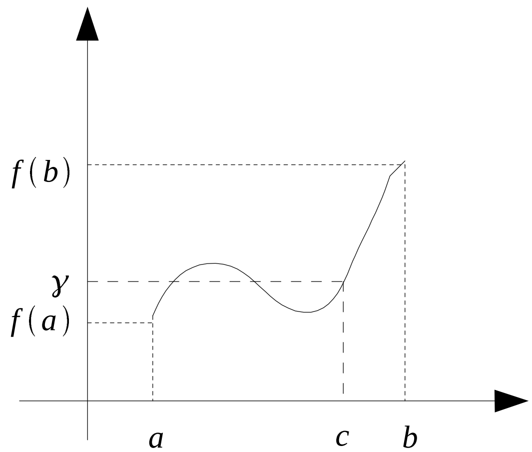
$\left| \sum_1^n f_k(x) - \sum_1^n f_k(x_0) \right| < \frac{1}{3} \epsilon \Rightarrow x \in U \; |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

Folgerung: Jede Potenzreihe $\sum_1^n a_n z^n$ stellt im Konvergenzkreis $K_R(0)$ eine stetige Funktion dar.

***Bemerkung**: Normal konvergente Reihe sind offensichtlich punktweise absolut konvergent. Für sie gelten daher der große Umordnungssatz und der Multiplikationssatz.*

7.4 Zwischenwertsatz

Zwischenwertsatz: Eine stetige Funktion $f{:}[a,b] \to \mathbb{R}$ $(a,b \in \mathbb{R})$ nimmt jeden Wert γ zwischen f(a) und f(b) an mindestens einer Stelle an.
$c \in [a,b] a_n \; : \; \gamma = f(c)$



Folgerung 1: Das Polynom $P(x)=x^n-\alpha$ mit $\alpha>0$ hat für $\forall\, n\in\mathbb{N}$ eine positive Nullstelle.

Folgerung 2: Bisektionsverfahren zur Nullstellenbestimmung

Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und $f(a)\cdot f(b)<0$ dann gibt es mindestens eine Nullstelle $\bar{x}$ im Inneren des Intervalls $a<\bar{x}<b$ mit $f(\bar{x})=0$.

Bestimmung der Nullstelle durch fortgesetzte Halbierung des Intervalls [a,b]

$$a_1=\frac{a+b}{2}$$

$$\underset{f(a)\cdot f(b)<0}{[a,b]}\to\underset{f(a)\cdot f(a_1)<0}{[a,a_1]}\to\underset{f(a_2)\cdot f(a_1)<0}{[a_2,a_1]}$$

Folgerung 3: Jedes Polynom mit einem ungeraden Grad ≥ 1 hat in $\mathbb{R}$ wenigstens eine Nullstelle.

$x^n=-(-x)^n\to$ Bisektion

7.5 Kompakte Mengen, Satz von Maximum und Minimum

Definition: $K\subset\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ heißt **kompakt**, wenn jede Folge $(x_n)\in K$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $\xi\in K$ besitzt.

Beispiel: Jedes kompakte (=abgeschlossene) Intervall [a,b] ist kompakt.

Beispiel: Kein offenes Intervall (a,b) ist kompakt.

Beweis: Aus Satz von Bolzano-Weierstraß und Rechenregeln für Folgen.

Lemma 1: Eine kompakte Menge ist **beschränkt**, d.h. $\exists S$ mit $|x|\leq S\quad\forall\, x\in K$.

Beweis-Skizze: Andernfalls könnte man Folgen ohne konvergente Teilfolgen bilden.

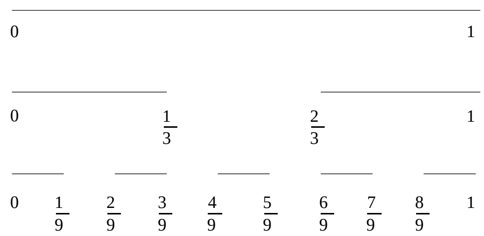
Lemma 1': f_1, ... ,f_S stetige, reelle Funktionen in $\mathbb{C}$. Jede beschränkte Mange K der Gestalt $K=\{z\in\mathbb{C}\,|\,f_1(z)\leq 0,\ldots,f_S(z)\leq 0\}$ ist kompakt.

Lemma 2: a) Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen ist kompakt.
b) Durchschnitt beliebig vieler kompakter Mengen ist kompakt.

Beispiel für eine kompakte Menge: cantorsche Diskentinum

Folge kompakter Mangen C_n:

$$C_0 := [0,1]$$
$$C_1 := C_0 \setminus \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$$
$$C_2 := C_1 \setminus \left(\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right)$$

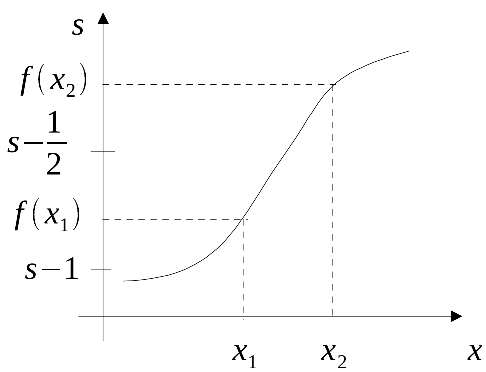


C_n ist Vereinigung von 2^n kompakten Intervallen der Längen $\frac{1}{3^n}$. C_{n+1} entsteht aus C_1 durch Entfernen der offenen mittleren Drittel.

$C := \bigcap_{n \geq 0}^{\infty} C_n$ **cantorsches Diskontinuum** ist kompakt.

Satz von Maximum und Minimum (Weierstraß)

Satz vom Maximum und Minimum (Weierstraß): Jede stetige Funktion $f: K \to \mathbb{R}$ auf einem Kompaktum K nimmt ein Maximum und ein Minimum an, d.h. $\exists\, \xi_1, \xi_2 \in K \;\vdots\; f(\xi_1) \leq f(x) \leq f(\xi_2) \quad \forall\, x \in K$



Beweis: Max. Dazu setzen wir:

$$s := \begin{cases} \sup f(K) & \text{falls } f(K) \text{ nach oben beschränkt ist} \\ \infty & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Ferner wählen wir $\forall\, n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_n \in K$ mit

$s - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq s$ falls $s < \infty$ (*)

$n \leq f(x_n)$ falls $s = \infty$

(x_n): Können annehmen, dass (x_n) einen Grenzwert $\xi \in K$ (sonst nehmen wir Teilfolge).

$x_n \to \xi$ Folgenkriterium $f(\xi) = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$

$\Rightarrow$ Folge $(f(x_n))$ beschränkt, was $s = \infty$ ausschliesst.

Wegen (*) $f(\xi) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = s$

Wegen $f(x) \leq s \quad \forall x \in K$, ist ξ Maximalstelle in K.

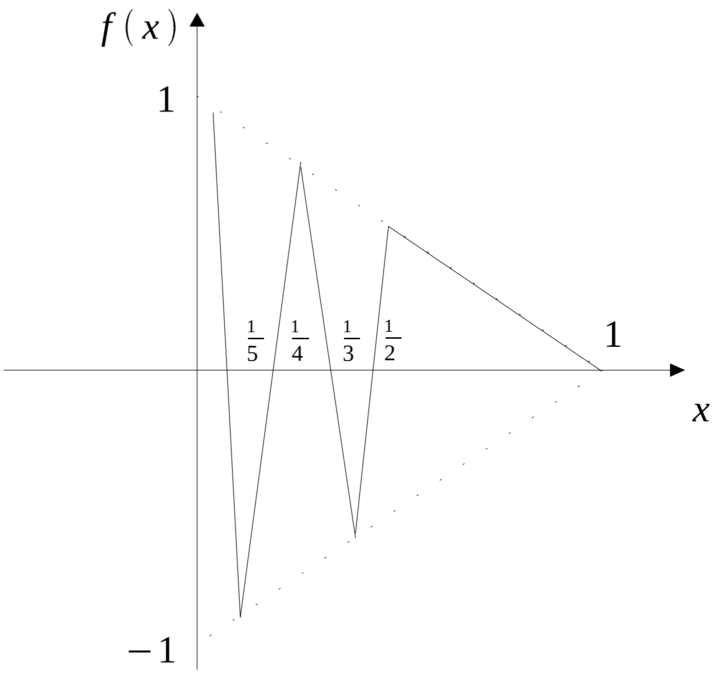
***Bemerkung**: Ohne Kompaktheit gilt dies nicht.*

Sei $f{:}(0,1] \to \mathbb{R}$. f ist stetig, beschränkt, hat aber (0,1] weder ein Maximum noch ein Minimum.

***Bemerkung**: Mit Satz vom Minimum lässt sich der Fundamentalsatz der Algebra beweisen.*

7.8. Stetige Fortsetzung, Grenzwerte von Funktionen

$h(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

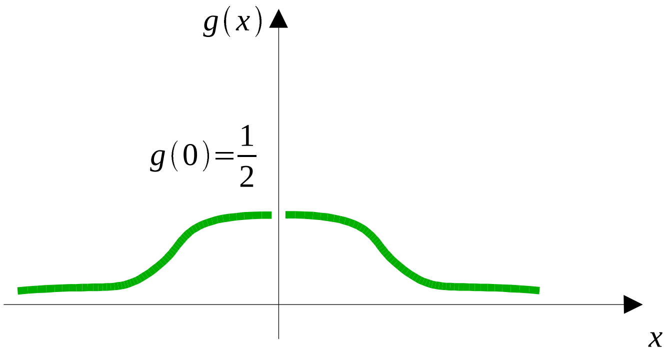


Gegeben sei $f{:}\, D \to C$ und $x_0 \in \mathbb{C}$, der nicht zu D gehören muss, aber darf.

Gibt es auf $D \cup \{x_0\}$ eine in x_0 stetige Funktion F(x), die auf D \ {x_0} die Gleichung F(x) = f(x) erfüllt ?

Eine solche Funktion heißt **stetige Fortsetzung** von f in dem Punkt x_0.

Beispiel: $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2} \overset{x \to 0}{\approx} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - 1}{x^2} \quad g(0) = \frac{1}{2}$



$\lim_{x\to 0} g(x)=\frac{1}{2}$ stetige Fortsetzung $G(x)=g(x) \quad x\neq 0, =\frac{1}{2} \quad x\in 0$

Defintion: $x_0 \in \mathbb{C}$ heißt **Häufungspunkt** von D, wenn jede Umgebung von x_0 unendlich viele Punkte von D enthält.

Beispiel 1: $(a,b)\subset \mathbb{R}$: alle Punkte $a\leq x\leq b$ sind Häufungspunkte.

Beispiel 2: Menge aller Häufungspunkte von $\mathbb{Q}$ ist $\mathbb{R}$.

Beispiel 3: $D=\left\{\frac{1}{n}, \quad n\in \mathbb{N}\right\}$ Genau 0 ist Häufungspunkt von D.

***Bemerkung**: Stetige Fortsetzung nur interessant, wenn x_0 Häufungswert von D ist.*

Satz (Einzigkeitssatz): Sei x_0 Häufungspunkt von D. Dann besitzt jede Fuktion f auf D \ {x_0} höchstens eine in x_0 stetige Fortsetzung F auf $D\cup\{x_0\}$.

Beispiel: $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}; \quad F=x+1; x_0=1;$

Beweis: Seien F_1 und F_2 verschiedene Fortsetzungen. Da x_0 Häufungspunkt ist, gibt es in der Umgebung von x_0 Punkte $x\neq 0 \vdots F_1(x)-F_2(x)=f(x)-f(x)=0; F_1(x_0)=F_2(x_0)$ wegen Stetigkeit von F_1 und F_2. Widerspruch !

Definition: $f: D\to \mathbb{C}$ hat im Häufungspunkt x_0 von D den Grenzwert a, wenn $\forall \ \varepsilon>0 \quad \exists \ \delta>0 \ \vdots \ |f(x)-a|<\varepsilon \quad \forall \ x\in D\setminus\{x_0\}$ mit $|x-x_0|<\delta$.

Sagt auch: f(x) konvergiert für $x\to x_0$ gegen a.

$\lim_{x\to x_0} f(x)=a$ oder $f(x)\to a \quad f(x)\to x_0$

Falls f in x_0 einen Grenzwert besitzt, so ist die durch $F(x):=\begin{cases} f(x) x\in D\setminus\{x_0\} \\ \lim_{x\to x_0} f(x) \quad x=x_0 \end{cases}$ definierte Funktion auf $D\cup\{x_0\}$ die stetige Fortsetzung von f.

Gehört x_0 zu D und ist f stetig in x_0, so ist $F(x_0)=f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Gehört x_0 zu D, ist aber f nicht stetig in x_0, so ist F eine Abänderung von f.

Beispiel 1: $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$

$F=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ liefert stetige Fortsetzung für x = 1.

Beispiel 2: $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^s-1}{x}=s \quad \forall\, s\in\mathbb{Q}$

Beweis: Durch Binominalentwicklung

$$(1+x)^s=1+sx+\binom{s}{2}x^2+\binom{s}{3}x^3\ldots$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^s-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+xs-1}{x}=s$$

Definition: $f,g\colon D\to\mathbb{C}$ heißen **asymptotisch gleich** für $x\to x_0$ und x_0 ein Häufungspunkt von D falls $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1;\ f(x) \underset{\text{asympt. gleich}}{\cong} g(x)$ für $x\to x_0$

da $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^s-1}{x}=s\ \ (1+x)^s-1\cong sx$ für $x\to 0$

Definition: Unter einer **punktierten Umgebung von x_0** versteht man $U^*(x_0):=U(x_0)\setminus\{x_0\}$ wobei $U(x_0)$ Umgebung von x_0 ist.

Definition'(Grenzwert): $f\colon D\to C$ konvergiert für $x\to x_0$ gegen a, wenn gilt: $\forall\,\epsilon>0\ \exists\, U^*(x_0)\colon |f(x)-a|<\epsilon$ für $x\in U^*(x_0)\cap D$

Rechen mit Grenzwerten:

$f(x)\to a,\ g(x)\to b$ für $x\to x_0$

$f(x)+g(x)\to a+b$

Regel I: $f(x)\cdot g(x)\to a\cdot b$

$\frac{f(x)}{g(x)}\to\frac{a}{b}$ falls $b\neq 0$

Regel II: Geg: $D\xrightarrow{f}E\xrightarrow{g}\mathbb{C}$

Es gelten $f(x)\underset{x\to x_0}{\to} a\in E$

ferner sei g stetig in a. Dann gilt: $g(f(x))\underset{x\to x_0}{\to} g(a)$

Regel III: $f,g\colon D\to\mathbb{R}$ haben Grenzwerte in x_0. Aus $f\leq g$ in einer $U^*(x_0)$ folgt $\lim_{x\to x_0} f(x)\leq\lim_{x\to x_0} g(x)$ Beweis aus Stetigkeit.. Konvergenzkritereien.

Satz (Folgenkriterium): $f\colon D\to\mathbb{C}$ hat in x_0 den Grenzwert $a \Leftrightarrow \forall\,(x_n)\in D\setminus\{x_0\}\wedge x_n\to x_0\ \vdots\ \lim_{x\to\infty} f(x_n)=a$.

Beweis: $F(x):=\begin{cases} f(x) & x\in D\setminus\{x_0\}\\ a & x=x_0\end{cases}$

Bestehen auf $D \cup \{x_0\}$ folgende Äquivalenzen:

$\lim\limits_{x \to x_0} F = a \Leftrightarrow$ F ist stetig in $x_0 \Leftrightarrow$ Die Folgenbedingung für Stetigkeit gilt.

Konvergenzkriterium nach Cauchy

$f\colon D \to \mathbb{C}$ hat in x einen Grenzwert $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists U^*(x_0) \colon |f(x) - f(x')| < \epsilon$
$\forall x, x' \in \overset{*}{U}(x_0) \cap D$

Beweis: Königsberger

7.9 Einseitige Grenzwerte, Grenzwerte bei Unendlich

$f\colon D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{R}$

I. Einseitige Grenzwerte

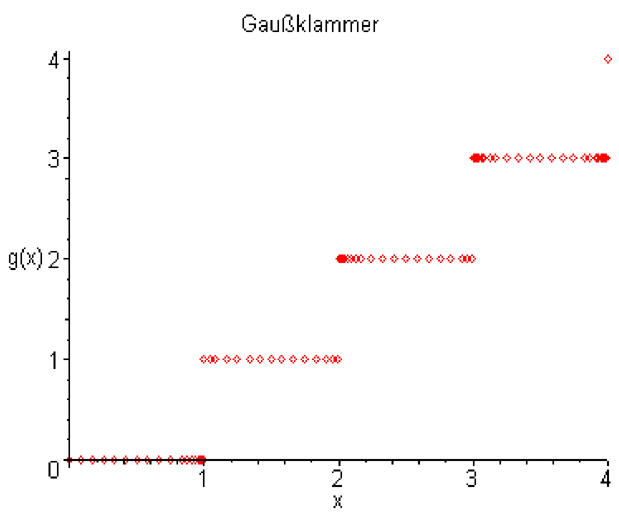
Definition: Sei x_0 Häufungspunkt von $D \cap (-\infty, x_0)$ bzw. $D \cap (x_0, \infty)$. Man sagt, f habe in x_0 den **linksseitigen bzw. rechtsseitigen Grenzwert** $a \in \mathbb{C}$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \vdots \ |f(x) - a| < \varepsilon \ \text{ für } \begin{cases} x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0) & \text{linksseitig} \\ x \in D \cap (x_0, x_0 + \delta) & \text{rechtsseitig} \end{cases}$$

Dafür:

$a = \lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x) = f(x_0 -)$ LS

$a = \lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x) = f(x_0 +)$ RS



g(x): Gaußklammer:

linksseitiger Grenzwert: g - 1

rechtsseitiger Grenzwert: g

II. Grenzwerte bei Unendlich

Definition: $f\colon D\to\mathbb{C}$ habe einen nach oben nicht beschränkten Definitionsbereich $D\subset\mathbb{R}$. Dann heiß $a\in\mathbb{C}$ Grenzwert von f bei ∞, wenn $\forall\,\epsilon>0\,\exists\,N\in\mathbb{R}\colon |f(x)-a|<\epsilon$ für $x\in D\wedge x>N$

Schreibt: $a=\lim\limits_{x\to 0} f(x),\ f(x)\underset{x\to 0}{\to} 0$

***Bemerkung**: Der Begriff Grenzwert einer Funktion bei ∞ verallgemeinert den Begriff Grenzwert einer Folge.*

$f\colon D\to\mathbb{C},\quad D=\mathbb{N}$
$f(n)=a_n$

Beispiel: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=0$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\frac{1}{2\sqrt{x}}\quad\text{für}\quad x>0$$

Beweis: $x>N:=\dfrac{1}{4\epsilon^2}$

$\left|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right|<\epsilon$ für $x>N$ *q.e.d.*

***Bemerkung**: Oft Substitution $x\to\xi=\dfrac{1}{x}$ und $\lim\limits_{\xi\to 0}$ nützlich.*

III Uneigentliche Grenzwerte

Definition: $f\colon D\to\mathbb{R}$ hat in $x_0\in\bar{R}$ (reelle Zahlen mit $\pm\infty$) den **uneigentlichen Grenzwert** ∞.
Beweis: wenn es $\forall\,k\in\mathbb{R}$ eine punktierte Umgebung $U^*(x_0)$ gibt, so dass

$$\begin{matrix} f(x)>k & x_0\in U^*(x_0)\cap D \\ f(x)<k & x_0\in U^*(x_0)\cap D \end{matrix}\quad \lim f(x)=\pm\infty$$

Rechenregeln

a) $\lim \dfrac{1}{f(x)}=0;\ f(x)>0\,\forall\,x\Rightarrow\lim f(x)=0$

b) $\lim |f(x)|=\infty\Rightarrow\lim\dfrac{1}{f(x)}=0$

c) $\lim f(x)=\infty;\ \ g(x)\geq A\,\forall\,x\Rightarrow\lim(f(x)+g(x))=\infty$

d) $\lim f(x)=\infty;\ \ g(x)\geq A\geq 0\Rightarrow\lim\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\infty$

8. Die Exponentialfunktion

$\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\exp(z) := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_0^\infty \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

Satz 1: Die Exponentialfunktion hat folgende Eigenschaften:
(E1) $\exp(z+w) = \exp(z)\cdot\exp(w) \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}$
(E2) $\lim_{z\to 0}\frac{\exp(z)-1}{z} = 1$

Sie ist die einzige Funktion auf $\mathbb{C}$ mit diesen Eigenschaften.

Satz 1': Zu jedem $c \in \mathbb{C}$ gibt es genau eine Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit
(E1) $f(z+w) = f(z)\cdot f(w) \quad \forall\, x, w \in \mathbb{C}$
(E2') $\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-1}{z} = c$

Diese Funktion ist gegeben durch $f(z) = \exp(cz) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{cz}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^\infty \frac{(cz)^k}{k!}$

Folgerungen aus E1:

a) $\exp(-z) = [\exp(z)]^{-1}$ und $\exp(z) \neq 0 \quad \forall\, z$

b) $\exp(r) = e^r$ für rationales r

$$e := \exp(1) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_0^\infty \frac{1}{k!}$$

Beweis:
(a) folgt aus $\exp(z)\exp(-z) = \exp(z-z) = \exp(0) = 1$
(b) für $r = n \in N$
$\exp(n) = \exp(\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{\text{n-mal}}) = [\exp(1)]^n = e^n$

$r = \frac{1}{n}$

$$e = \exp(1) = \exp\left(\frac{n}{n}\right) = \exp\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots\frac{1}{n}\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}} = \left[\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n$$

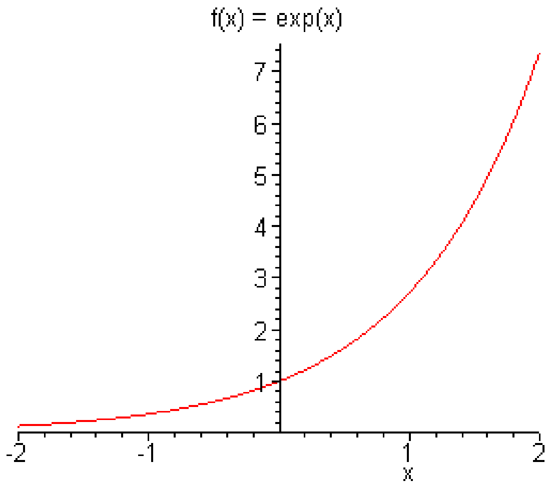
$$r = \frac{m}{n}\ (m, n \in \mathbb{R}) \text{ da } \exp\left(\frac{m}{n}\right) = \left[\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m \text{ oder da } \exp\left(-\frac{m}{n}\right) = \left[\exp\left(\frac{m}{n}\right)\right]^{-1}$$

$\exp(r) = e^r$
Für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ $e^z := \exp(z)$
E1: $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$
E1 & E2 ⇒ Die Exponentialfunktion ist stetig

$$\lim_{h\to 0}(e^{z+h} - e^z) = e^z \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h}\cdot h \to 0$$

8.2 Die Exponentialfunktion für reele Argumente

Satz 2:
a) Für $x \in \mathbb{R}$ ist e^x reell und größer als Null.
b) exp: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wächst streng monoton.
c) exp: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist bijektiv



Satz 3: Für jede natürliche Zahl n gilt

(*) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$

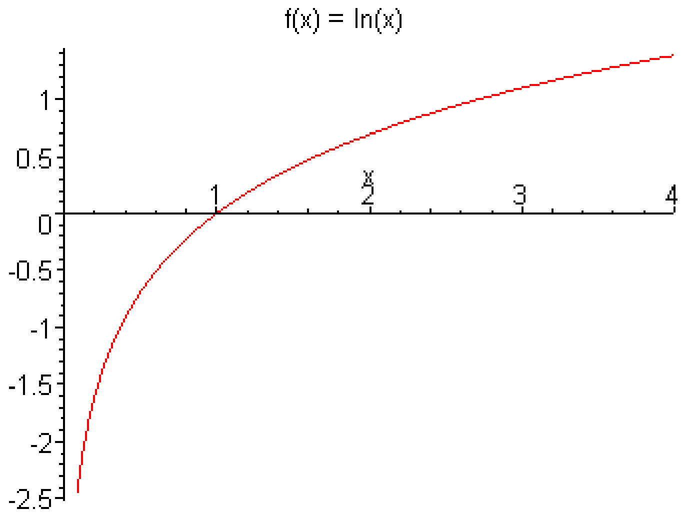
(**) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^{-n}} = \lim\limits_{\xi \to \infty} \frac{\xi^n}{e^{\xi}} = 0$

$\exp(x) \quad e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad x > 0$

$\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!}$ q.e.d.

8.3 Der natürliche Logarithmus

$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$



$\boxed{y = e^x \text{ und } x = \ln y}$

Satz 5: Der natürliche Logarithmus hat die Eigenschaften

(L1) $\ln x\, y = \ln x + \ln y \quad (x, y \in \mathbb{R}^+)$

(L2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Beweis (L1): $e^{\ln xy} = xy = e^{\ln x} \cdot e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y}$

sei (x_n) eine Nullfolge mit $x_n \neq 0$; $y_n := \ln(1 + x_n)$,

eine Nullfolge $\dfrac{\ln(1+x_n)}{x_n} = \dfrac{y_n}{e^{y_n} - 1} \to 1$ für $n \to \infty$

Satz 6: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} = 0 \quad n \in \mathbb{N}$

Beweis: Die Substitution $x := e^{n\xi}$

$$\lim_{\xi \to \infty} \frac{n\xi}{e^{\xi}} = 0$$

8.4 Exponentialfunktionen zu allgemeinen Basen

Sei a eine reelle Zahl > 0

$$a^x := e^{x \ln a}$$

$F \quad x \to a^x$ Exponentialfunktion zur Basis a

(E1) $a^{x+y} = a^x a^y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$

(E2$^{\ln a}$) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

Weitere Eigenschaften:

a) a^x ist stetig

b) Ihr Wertvorrat ist $\mathbb{R}^+$ falls $a\pm 1$, d.h $\ln a\neq 0$

c) Sie ist streng monoton wachsend (fallend) wenn a > 1 (a < 1) ist.

Rechenregeln:

Für a, b > 0 und beliebige x, $y\in\mathbb{R}$ gilt:

a) $(a^x)^y=a^{xy}$

b) $a^x b^x=(ab)^x$

Beweis: a) $(a^x)^y=e^{y\ln a^x}=e^{xy\ln a}=a^{xy}$ b) $a^x\cdot b^x=e^{x\ln a}\cdot e^{x\ln b}=e^{x\ln ab}=(ab)^x$ q.e.d.

Potenzfunktion zu beliebigen reellen Exponenten:

$x^a:=e^{a\ln x}$ für $x>0$

für a > 0 x^a wächst streng monoton.

für a < 0 x^a fällt streng monoton.

Wichtige Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty}x^a=\begin{cases}\infty & \text{für } a>0\\ 0 & \text{für } a<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}x^a=\begin{cases}0 & \text{für } a>0\\ \infty & \text{für } a<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^a}=0 \quad \text{für } a>0$$

$$\lim_{x\to 0}x^a\ln x=0 \quad \text{für } a>0$$

Satz 7: Für jedes $s\in\mathbb{R}$ und $x\in(-1,1)$ gilt:

$$(1+x)^s=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{s}{n}x^n=1+sx+\binom{s}{2}x^2+\binom{s}{3}x^3+\dots$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$$

$$\ln 2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots$$

<u>Berechnung der Logarithmen</u>:

Für $x\in(-1,1)$

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots)$$

$y>0 \quad y=\frac{1+x}{1-x}$ mit $x=\frac{y-1}{y+1}$ z.B: $y=2\Rightarrow x=\frac{1}{3}$

$$\ln 2=\ln\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}\ldots\right)$$

$\ln 2\cong 0{,}693147+R \quad |\mathbb{R}|<10^{-6}$

Stirlingsche Formel: (*1692-1770*)

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\exp\left(\frac{\vartheta n}{12n}\right); \quad v_n\in(0,1]$$

$$\ln n!=\ln\sqrt{2\pi}+(n+\frac{1}{2})\ln n-n+\frac{\vartheta n}{12n}$$

n=1000; 0,1 Promille

1000! $\simeq 4{,}024\cdot 10^{2568}$

8.7 Hyperbolische Funktion

$$\cosh(z):=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z})$$

$$\sinh(z):=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z})$$

$$\tanh(z):=\frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$$

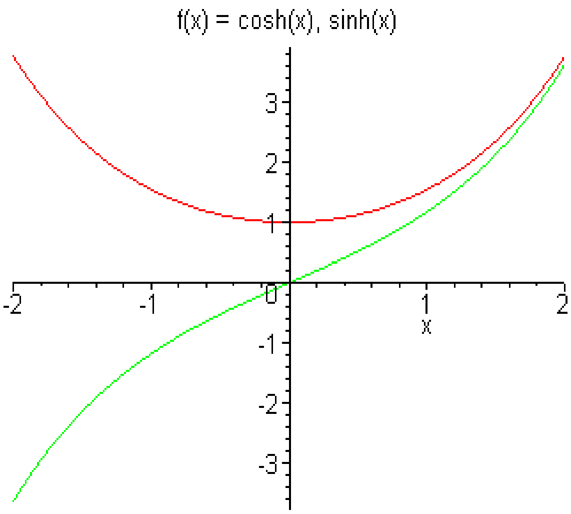
$$\coth(z):=\frac{\cosh(z)}{\sinh(z)}$$

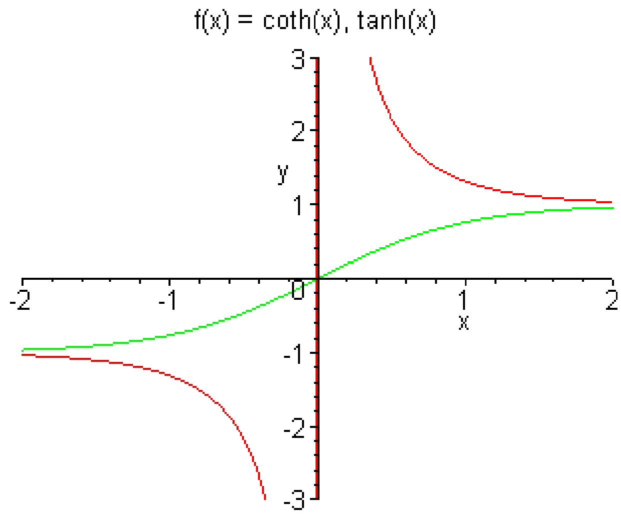
$$\cosh(z+w)=\cosh(z)\cosh(w)+\sinh(z)\sinh(w)$$
$$\sinh(z+w)=\sinh(z)\cosh(w)+\cosh(z)\sinh(w)$$
$$\cosh^2 z-\sinh^2 z=1$$

auch durch Potenzreihen:

$$\cosh(z)=\frac{1}{2}\sum_0^{\infty}[1+(-1)^n]\frac{z^n}{n!}=\sum_0^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sinh(z)=\frac{1}{2}\sum_0^{\infty}[1-(-1)^n]\frac{z^n}{n!}=\sum_0^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$





8.A Tringonometrische Funktionen (KB 10)

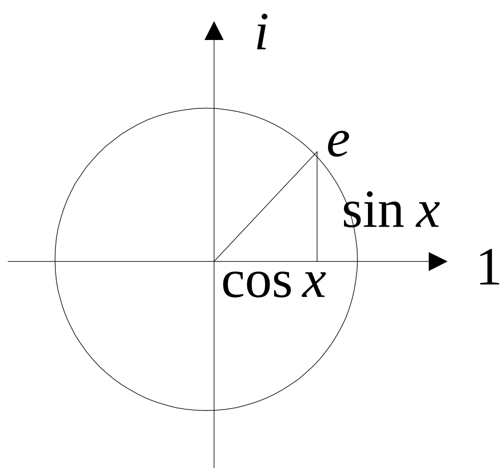
$$\cos x := \mathrm{Re}\,(e^{ix}) = \frac{1}{2}\,(e^{i x} + e^{-i x})$$

$$\sin x := \mathrm{Im}\,(e^{ix}) = \frac{1}{2\,i}\,(e^{i x} - e^{-i x})$$

Es gilt:

$$\boxed{e^{i x} = \cos x + i \sin x \text{ (\textbf{Euler-Formel})}}$$

***Bemerkung**: e^{ix} liegt wegen $\left|e^{i x 2}\right| = e^{i x}\, e^{-i x} = 1$ auf dem Einheitskreis von $\mathbb{C}$.*



$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$

Definition: Für beliebige $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos z := \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

$$\sin z := \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

Folgt:

$\cos z = \cosh i z$

$\sin z = -i \sinh(i z)$

Mittels $e^{i(z+w)} = e^{iz} e^{iw} \Rightarrow$

Additionstheorem:

$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$

$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$

Aus der Exponentialreihe:

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

Aus der Sinusreihe folgt: $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$

Wertetabelle:

x	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
e^{ix}	i	-1	-i	1
$\cos x$	0	-1	0	1
$\sin x$	1	0	-1	0

Satz: $\forall\, z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$e^{z+i\frac{\pi}{2}} = i e^z$$

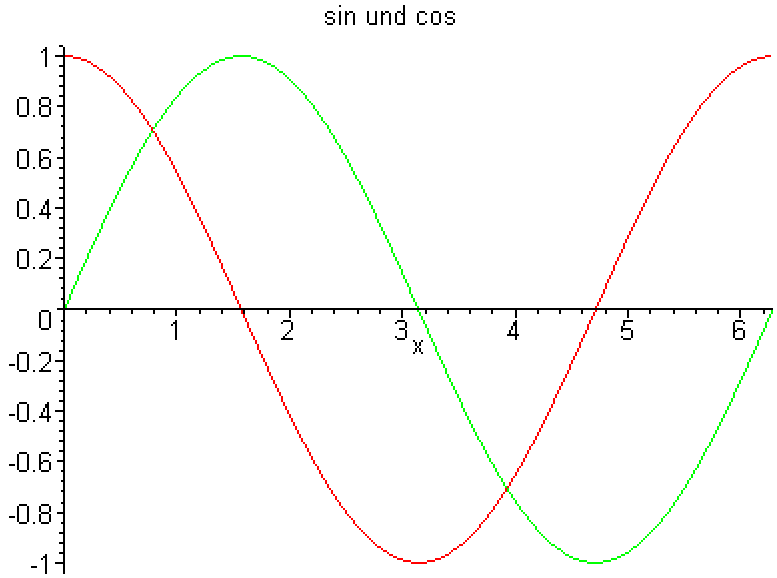
$$e^{z+i\pi} = -e^z$$

$$e^{z+2i\pi} = e^z$$

D.h. die Exponentialfunktion hat die imaginäre Periode $2\pi i$.

Satz: $\forall\ z \in \mathbb{C}$

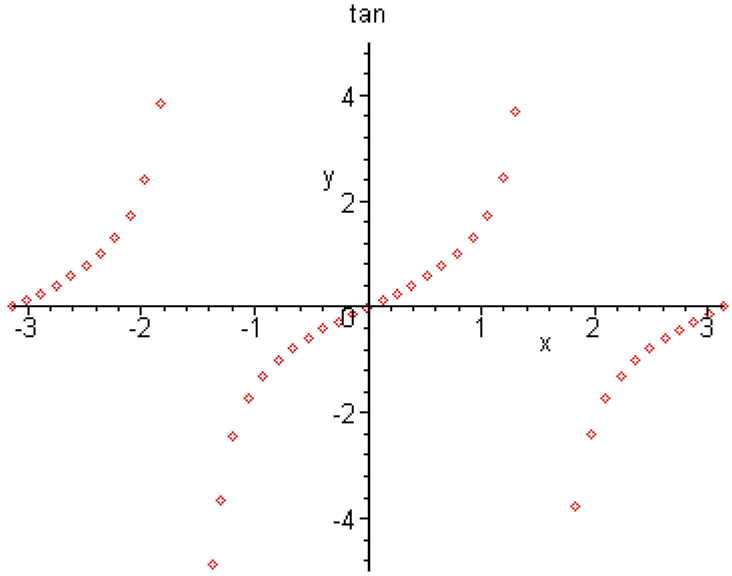
$$\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\ z$$
$$\cos\left(z+\pi\right)=-\cos\ z$$
$$\cos\left(z+2\ \pi\right)=\cos\ z$$
$$\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\ z$$
$$\sin\left(z+\pi\right)=-\sin\ z$$
$$\sin\left(z+2\ \pi\right)=\sin\ z$$



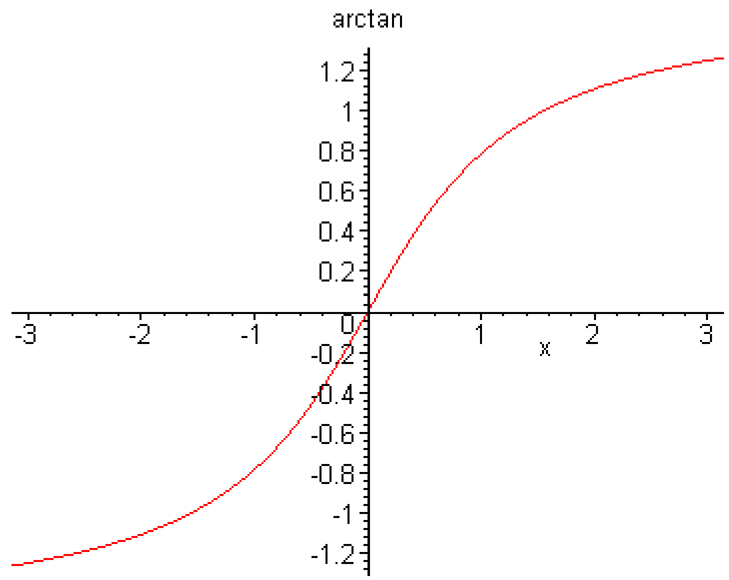
Definition:

$\tan\ z := \dfrac{\sin\ z}{\cos\ z}$ (auch: tg z)

$\cot\ z := \dfrac{\cos\ z}{\sin\ z}$ (auch ctg z)



Definition: Tangens ist in $\left(-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right)$ definiert, stetig, streng monoton wachsend und weder nach oben noch nach unten beschränkt. Er bildet daher dieses Intervall <u>bijektiv</u> auf $\mathbb{R}$ ab und besitzt dort eine Umkehrfunktion, die $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right)$ (**Arcustangens**)



$\pi = 4 \arctan 1$

Reihe: $\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$

Beweis: Königsberger

Satz (Additionstheorem):

$$\tan(z+w)=\frac{\tan z+\tan w}{1-\tan z\tan w};$$

$$\arctan x+\arctan y=\arctan\left(\frac{x+y}{1-x\,y}\right);$$

Beweis: aus Definition

Satz (Polarkoordinaten): Jede komplexe Zahl z besitzt eine Darstellung

$z=r\,e^{i\phi}$ mit $r=|z|,\phi\in\mathbb{R}$

ϕ ist im Falle $z\neq 0$ bis auf eine Addition eines ganzzahligen Vielfachen von 2π bestimmt, im Fall $z=0$ beliebig.

***Bemerkung**: Jedes Paar (r,ϕ) mit $z=r\,e^{i\phi}$ heißt **Polarkoordinaten** für z, und ϕ ist das **Argument** für z. $e^{i\phi}$ heißt **Phase** von z (bzw. **Phasenfaktor**).*

Beweis:

Sei $z\neq 0$

$$\frac{z}{|z|}=\xi+i\eta,\quad \xi,\eta\in\mathbb{R}.$$

Dann ist $\left|\frac{z}{|z|}\right|^2=1\Rightarrow\xi^2+\eta^2=1$

$\alpha:=\arccos\xi\quad\Rightarrow\quad\xi=\cos\alpha$

$\Rightarrow\eta=\pm\sin\alpha$

$$\phi:=\begin{cases}\alpha & \text{wenn }\ \eta=+\sin\alpha\\ -\alpha & \text{wenn }\ \eta=-\sin\alpha\end{cases}$$

Dann ist $\xi=\cos\alpha=\cos\phi,\quad\eta=\sin\phi$

$\Rightarrow\xi+i\eta=e^{i\phi}$

$\Rightarrow z=|z|\,e^{i\phi}$

Sei nun $z=|z|\,e^{i\psi}$ eine weitere Darstellung im Fall $z\neq 0$

$\Rightarrow e^{i(\phi-\psi)}=1\Rightarrow i(\phi-\psi)=2k\pi i\quad k\in\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow\phi=\arctan\frac{\eta}{\xi}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\eta}{\xi}=\tan\phi$$

9. Differenzialrechnung

Beschränkung auf $D \subset \mathbb{R}$. Lassen aber komplexen Wertebereich zu.

9.1 Ableitung einer Funktion

Definition: $f\colon I \to \mathbb{C}$ heißt **differenzierbar** in $x_0 \in I$, wenn $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

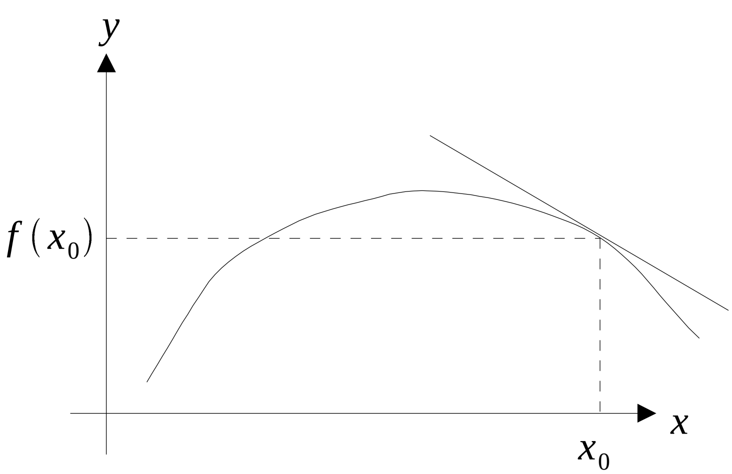
Dieser Grenzwert heißt dann **Ableitung** oder der **Differenzialquotient von f in x_0** und mit $f'(x_0) = D\,f(x_0) = \dfrac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,x}(x_0)$ geschrieben.

Ferner heißt die Funktion **f in I differenzierbar**, wenn sie in jedem Punkt des Intervalls I differenzierbar ist.

$x \to x_0 + h$

$$f'(x_0) = \frac{\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Geometrisch definiert für ein reelles f die **Gerade** $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ die Tangente in $\left(x_0, f(x_0)\right)$ des Graphen f



Bemerkung:

a) $D\,x^n = n\,x^{n-1} \quad n \in \mathbb{N}$

b) $D\,e^{c\,x} = c\,e^{c\,x} \quad c \in \mathbb{C}$
   $D\,a^x = a^x \ln a \quad a \in \mathbb{R}$

c) $D \ln x = \dfrac{1}{x}$

Beweis:

a) $\dfrac{\xi^n - x^n}{\xi - x} = \xi^{n-1} + \xi^{n-2}\,x + \ldots + x^{n-1} \underset{\xi \to x}{\to} n \cdot x^{n-1}$

b) $\dfrac{e^{c(x+h)} - e^{c\,x}}{h} = e^{c\,x}\,\dfrac{e^{c(h)} - 1}{h} = e^{c\,x}\,\dfrac{c\,h + \dfrac{(c\,h)^2}{2!} + \ldots}{h} \underset{h \to 0}{\to} c\,e^{c\,x}$

c) $\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\frac{1}{x}\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}=\frac{1}{x}\frac{\ln\left(1+\frac{n}{x}\right)}{\frac{h}{x}}=\frac{1}{x}\frac{\frac{h}{x}-\left(\frac{h}{x}\right)^2\frac{1}{2}-\left(\frac{h}{x}\right)^3\frac{1}{3}-\dots}{\frac{h}{x}}\underset{h\to 0}{\to}\frac{1}{x}$

Lemma:
$f\colon I\to\mathbb{C}$ ist in $x_0\in I$ genau dann differenzierbar, wenn es eine in x_0 stetige Funktion $q\colon I\to\mathbb{C}$ gibt, sodass $f(x)=f(x_0)+q(x)(x-x_0)$. Es ist dann $f'(x_0)=q(x)$.

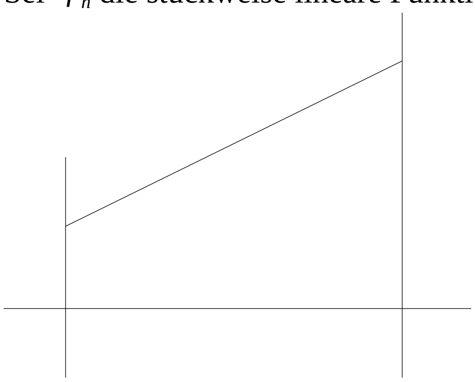
Beweis: Die Existenz von $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ bedeutet, dass die durch $q(x):=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $x\in I\setminus\{x_0\}$ definierte Funktion in x_0 festgesetzt werden kann; der Wert der setigen Funktion ist Grenzwert $q(x_0)=f'(x_0)$

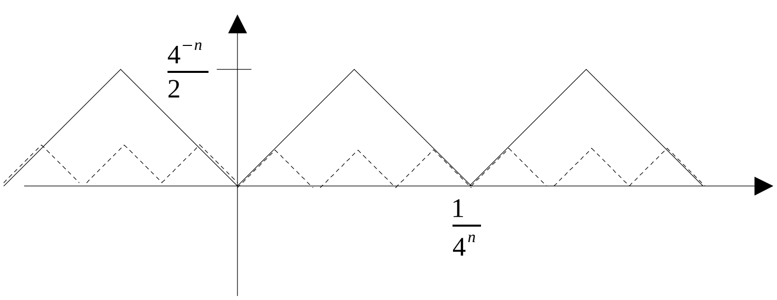
***Bemerkung**: Differenzierbar $\Rightarrow$ stetig*

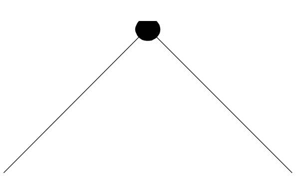
$\lim\limits_{\substack{x\uparrow 0\\ x\downarrow 0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}\quad \lim\limits_{x\uparrow 0}\neq\lim\limits_{x\downarrow 0}$

Beispiel: Takagi-Funktion

Sei f_n die stückweise lineare Funktion auf $\mathbb{R}$ mit der Gerade 4^{-n}







$f := \sum_{n=1} f_n$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, aber nirgends differenzierbar.

Lemma: $f\colon I \to \mathbb{C}$ ist in x_0 genau dann differenzierbar, wenn $\exists$ lineare Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$;

(*) $F(x_0) = f(x_0)$ und $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - F(x)}{x - x_0} = 0$

Ggf. ist (**) $F(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ für $x \in \mathbb{R}$

Bemerkung: *Diese Formulierung fordert die Approximierbarkeit von f durch eine lineare Funktion F derart, dass* $f(x) \to F(x)$ *mit* $x \to x_0$ *schneller als* $x - x_0$ *. Entsprechend heißt F die* ***lineare Approximation*** *von f im Punkt* x_0*.*

Bemerkung: *Diese Lemmas zeigen, dass „differenzierbar" bedeutet, dass man die Funktion* ***lokal*** *durch eine lineare Funktion aproximieren kann.*

Beweis:

Sei F eine lineare Funktion mit (*).

Dann ist $F(x) = f(x_0) + b(x - x_0)$ mit einem $b \in \mathbb{C}$.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{f(x) - F(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - F(x_0)}{x - x_0} + b$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b \quad \Rightarrow \text{f ist differenzierbar}$$

Umkehr: f sei differenzierbar in x_0 $\Rightarrow F(x) \exists \Rightarrow$ (**) $\Rightarrow$ (*)

Definition: Man sagt, eine $f\colon D \to \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in D$

(i) ein **globales Maximum**, wenn $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall\, x \in D$

(ii) ein **lokales Maximum**, wenn $\exists\, U$ um x_0 : $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall\, x \in U \cap D$

Entsprechend ist das Minimum definiert.

Bemerkung:

Eine auf einem kompakten Intervall stetige reelle Funktion hat nach 7.5 ein globales Maximum und ein globales Minimum.

Satz (Extremalstellen): Sei f in einem offenen Intervall I um x_0 definiert.. Besitzt f in x_0 ein lokales Extremum und ist f in x_0 differenzierbar, so gilt: $f'(x_0) = 0$

Beweis:

$f|U_{x_0}$ habe in x_0 ein Maximum. Für $x \in U_{x_0}$ mit $x > x_0$ ist $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$.

Mit $x \downarrow x_0$ folgt $f'(x_0) \leq 0$.

Analog $x < x_0$: $f'(x_0) \geq 0$

$\Rightarrow f' = 0$.

***Bemerkung**: Die <u>Kandidaten</u> für Extremalstellen von* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *sind also*

(i) die Randpunkte a, b

(ii) die Punkte $x\in(a,b)$ *, in dem f nicht differenzierbar ist*

(ii) die Punkte $x\in(a,b)$ *, in denen* $f'(x_0)=0$

Keiner dieser Punkte muss tatsächlich Extremalstelle sein:

Beispiel:

$f(x)=x^3,\quad x\in[-1,1]$

$f'(0)=3x^2|_{x_0}=0$

Trotzdem besitzt f in 0 nicht einmal ein lokales Extremum.

9.4 Ableitungsregeln

Differenzenquotient $\frac{f-f_0}{x-x_0}$ anschreiben für $f=f_1+f_2,\ f_1\cdot f_2,\ \frac{f_1}{f_2}\Rightarrow$

I. Algebraische Regeln

(a) $(f+g)*(x)=f'(x)+g'(x)$

(b) $(f\,g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ (Produktregel)

(c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$ (Quotientenregel)

Beispiel: $(\tanh x)'=\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)'=\frac{\sinh' x\cosh x-\sinh x\cosh' x}{(\cosh x)^2}=\frac{1}{(\cos x)^2}$

II. Kettenregel

Gegeben: $I\xrightarrow{f}J\xrightarrow{g}\mathbb{C}$

f sei in x_0 differenzierbar g sei in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar

$\Rightarrow g\circ f$ in x_0 differenzierbar und es gilt $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$

$g\circ f(x)=g(f(x))$

Beispiel: $(x^a)'=\left(e^{a\ln x}\right)'=\frac{e^{a\ln x}\cdot a}{x}\quad f=e^y\quad f=a\ln x$

Beispiel: $(\ln|f|)'=\frac{f'}{f}$, wobei $f\neq0$ in (a,b) differenzierbar

***Bemerkung**: Mann nennt* $\frac{f'}{f}$ *die **logarithmische Ableitung**.*

Rechenregel: Seien f_1, ..., f_n differenzierbar, reele Funktionen auf (a,b) ohne Nullstellen und sei a_1, ...,$a_n \in$ R, so gilt:

$F:=|f_1|^{a_1}|f_2|^{a_2}\dots|f_n|^{a_n}$

$\frac{F'}{F}=a_1\frac{f_1'}{f_1}+a_2\frac{f_2'}{f_2}+\dots a_n\frac{f_n'}{f_n}$

Beweis: $\ln F = \sum_{k\,0\,1}^{n} a_k \ln |f_n|$;

III. Differenziation der Umkehrfunktion

Sei g die Umkehrfunktion einer streng monotonen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$.
Ist f in $y_0 \in I$ differenzierbar mit $f'(y_0) \neq 0$,
so ist g in $x_0 = f(y_0)$ differenzierbar mit

$$f'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'\left(g(x_0)\right)} ;$$

Memnotechnisch: $\boxed{\frac{\mathrm{d}\ y}{\mathrm{d}\ x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\ x}{\mathrm{d}\ y}}}$.

Beispiel:

$$y = e^x \to \frac{\mathrm{d}\ y}{\mathrm{d}\ x} = e^x ;$$

$$x = \ln\ y \to \frac{\mathrm{d}\ x}{\mathrm{d}\ y} = \frac{1}{y} = \frac{1}{e^x} ;$$

9.3 Höhere Ableitungen

Definition: Sei f in I differenzierbar. Ist dann $f' : I \to \mathbb{C}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar, so heisst die Ableitung von f' in x_0 die **2. Ableitung** von f in x_0, $f''(x_0) = D^2 f(x_0) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$.

Allgemein definiert man rekursiv die **n-te Ableitung** $f^{(n)}$ von f als Ableitung von $f^{(n.1)}$, falls $f^{(n-1)}$ differenzierbar ist. $f^{(n)} = D^n f = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}\, x^n}(x_0)$

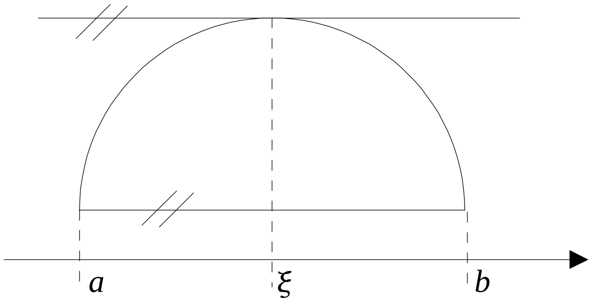
Existiert für $\forall\ n \in \mathbb{N}$ die Ableitung, so heisst f **beliebig oft differenzierbar**.

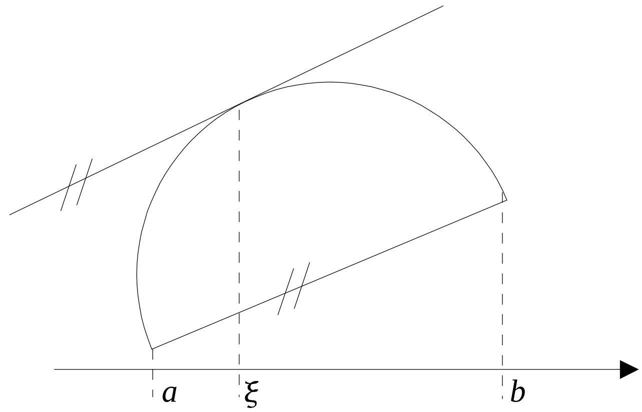
Definition: $f : I \to \mathbb{C}$ heißt **stetig differenzierbar**, wenn f auf I differenzierbar ist und wenn f' stetig ist.
$f : I \to \mathbb{C}$ heißt **n-mal stetig differenzierbar**, wenn f', f'', ..., $f^{(n)}$ existieren und stetig sind.

9.4 Mittelwertsatz und Schrankensatz

Mittelwertsatz: *f*: $[a,b] \to \mathbb{R}$ sei auf dem Intervall [a,b] stetig und auf dem offenen Intervall (a,b) differenzierbar. Dann $\exists\, \xi \in (a,b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$

Spezialfall (**Satz von Rolle**):
Gilt $f(a)=f(b)$, so $\exists \xi \in (a,b): f'(\xi)=0$.





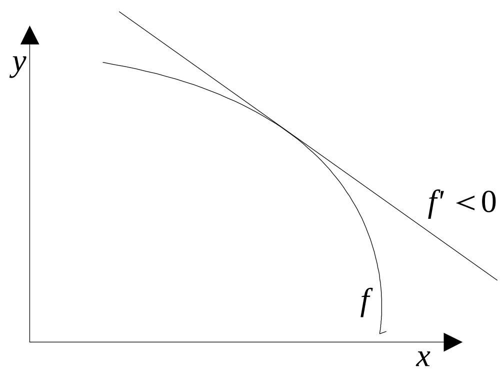
Beweis (Rolle): Ist f = const, so ist $f'(\xi)=0 \,\forall\, \xi \in (a,b)$. F nicht const, nimmt f als stetige Funktion auf [a,b] Maximum und ein Minimum an, wobei eines der beiden von f(a) = f(b) verschieden ist. F hat daher in $\xi \in (a,b)$ ein Extremum und dort ist wegen des Satz über Extremstellen $f'(\xi)=0$. q.e.d.

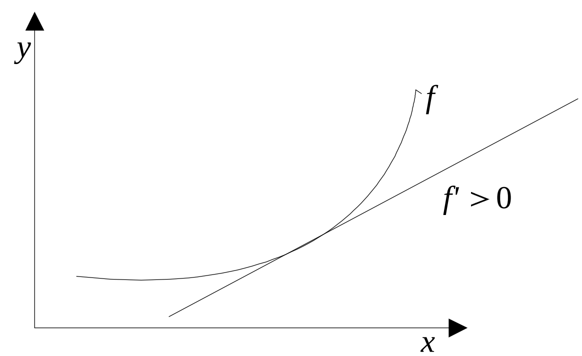
Folgerungen: Monotoniekriterium: Ist $f:(a,b)\to \mathbb{R}$ differenzierbar, so gilt

$$\begin{matrix} f'>0 \\ f'<0 \end{matrix} \text{ in } (a,b) \Rightarrow f \begin{matrix} \text{wächst} \\ \text{fällt} \end{matrix} \text{ in } (a,b) \text{ streng monoton}$$

$$\begin{matrix} f'\geq 0 \\ f'\leq 0 \end{matrix} \text{ in } (a,b) \Rightarrow f \begin{matrix} \text{wächst} \\ \text{fällt} \end{matrix} \text{ in } (a,b) \text{ monoton}$$

Ist f ausserdem stetig auf [a,b] so gelten alle rechtsstehenden Aussagen auf [a,b]. Bew: Königsberger

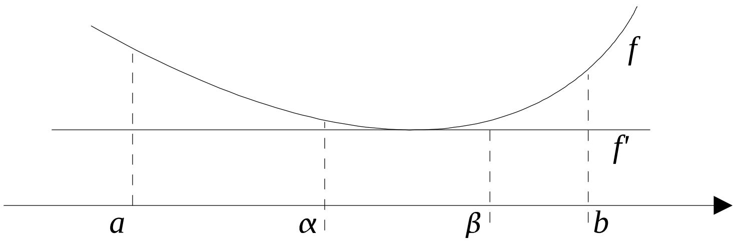




2. Kriterium für lokale Extrema:

Sei $f:(a,b)\to \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist $f'(x_0)=0$ mit $x_0 \in (a,b)$; so hat f in x_0 ein lokales Minimum, wenn x_0 eine Umgebung (α,β) mit $\begin{matrix} f'(x)\leq 0 \text{ für } x\in(\alpha,x_0) \\ f'(x)\geq 0 \text{ für } x\in(x_0,\beta) \end{matrix}$

Zusatz: $f:(a,b)\to \mathbb{R}$ sei 2-mal stetig differenzierbar. Ist $f'(x_0)=0$ in $x_0 \in (a,b)$, so hat f in x_0 ein



a) lokales Minimum, wenn $f''(x_0) > 0$

b) lokales Maximum, wenn $f''(x_0) < 0$

Beweis: Königsberger

f" ~ "Krümmung"

Bemerkung: *Der Mittelwertsatz gilt nur für reellwertige Funktionen. Es gilt aber folgende Verallgemeinerung für komplexwertige Funktionen:*
Sei $f:[a,b] \to \mathbb{C}$ *stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann* $\exists\, \xi \in (a,b):$
$|f(x_1) - f(x_2)| \le |x_1 - x_2| \cdot \| f' \|_{[a,b]}$.

Schrankensatz: Eine stetig differenzierbare Funktion $f:[a,b] \to \mathbb{C}$ auf einem kompakten Intervall [a,b] ist Lipschitz-stetig; für $x_1, x_2 \in [a,b]$ gilt $|f(x_1) - f(x_2)| \le |x_1 - x_2| \cdot \| f' \|_{[a,b]}$

Folgerung: Eine differenzierbare Funktion $f: I \to \mathbb{C}$ ist auf I konstant $\Leftrightarrow f' = 0$

Satz: Jede differenzierbare Funktion $y: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die eine Identität y'=ay mit $a \in \mathbb{C}$ erfüllt, hat die Gestalt $y(x) = C e^{ax}$ C ist eine Konstante.

Bemerkung: *Bedingung zwischen einer gersuchten Funktion und Ihrer Ableitung nennt man eine* ***Differenzialgleichung***: *Diese entsteht beim Grenzübergang* $\Delta t \to 0$ *aus, der 'diskreten' Gleichung* $y(t+\Delta t) - y(t) = ay(t) \cdot \Delta t$ *für eine Funktion y, die in diesem Zusammenhang Wachstumsfunktion heisst, bei welcher Zuwachs* $y(t+\Delta t) - y(t) \propto$ *zum Bestand y(t) und zur Zeitspanne* Δt *ist.*

Beweis: $f(x) := y(x) e^{-ax}$
$f'(x) = (y'(x) - ay(x)) e^{-ax} = 0$
$\Rightarrow f = \text{const} = y(x) e^{-ax} \Rightarrow y = c e^{ax}$

Satz (Verallgemeinerter Mittelwertsatz):
$f,g: [a,b] \to \mathbb{R}$ seien stetig und in (a,b) differenzierbar. Ferner sei $g'(x) \ne 0\ \forall\, x \in (a,b)$. Dann ist
$g(b) \ne g(a)$ und $\exists\, \xi \in (a,b)$ mit $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Beweis: Es ist $g(b) \ne g(a)$, sonst gäbe es ein $\xi \in (a,b)$ mit $g'(\xi) = 0$ nach Rolle.

$$F(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)) \Rightarrow F(b) = F(a)$$

Daher $\exists\, \xi$ mit $F'(\xi) = 0$

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)=0$$

Die L'Hospitalsche Regel:

$f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ seien differenzierbar, und es sei $g'(x)\neq 0$ für $x\in(a,b)$. In jedem der beiden Fälle

a) $f(x)\to 0$ und $g(x)\to 0$ für $x\downarrow a$

b) $f(x)\to\infty$ und $g(x)\to\infty$ für $x\downarrow a$

gilt dann:

Existiert $\lim\limits_{x\downarrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch $\lim\limits_{x\downarrow a}\frac{f(x)}{g(x)}$ und es ist $\lim\limits_{x\downarrow a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\downarrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Entsprechendes gilt für $x\uparrow b$, $x\to\infty$ und $x\to-\infty$

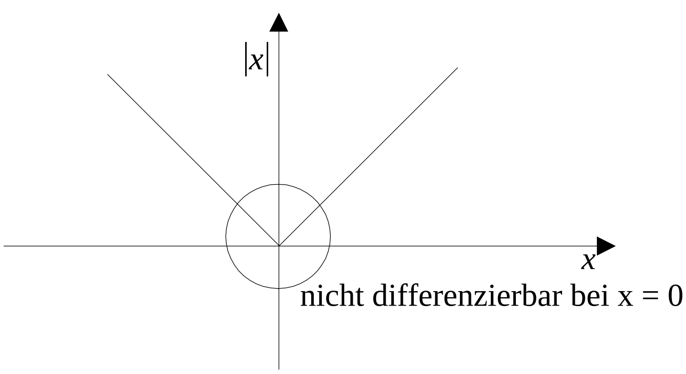
Beispiel: $\lim\limits_{x\downarrow 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\downarrow 0}\frac{\cos x}{1}=1$

$$\lim_{x\downarrow 0} x\cdot\ln x=\lim_{x\downarrow 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\downarrow 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\downarrow 0} -x=0$$

9.6 Reihen differenzierbarer Funktionen

***Bemerkung**: Normal konvergente Reihen stetiger Funktionen definieren eine stetige Funktion. Jedoch gilt: Eine normal konvergente Reihe differenzierbarer Funktionen ist <u>nicht</u> notwendig differenzierbar.*

Beispiel: $|x|=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\left(x^2-1\right)^n$



Satz: Seien $f_{n:} I \to \mathbb{C}$ differenzierbare Funktionen wie folgt:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert punktweise auf I
2. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konvergiert normal auf I

Dann ist $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf I differenzierbar und hat die Ableitung $f' := \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$.

Beweis: Königsberger

Beispiel: Eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit einem Konvergenzradius R > 0 darf in (-R,R) gliedweise differenziert werden: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$

Sie darf sogar beliebig oft gliedweise abgeleitet werden.

11. Lineare DG mit konstanten Koeffizienten

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Beispiel: $\dot{y}=-ky$ radioaktiver Zerfall $m\,\ddot{y}+r\,\dot{y}+ky=q(t)$

11.1 Einführung

Unter einer **linearen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten** versteht man die Gleichung

(L) $y^{(n)}=a_{n-1}\,y^{(n-1)}+\ldots+a_1\,y'+a_0\,y=q(x)$,

wobei $a_0,\ldots,a_{n-1}\in\mathbb{C}$ und $q: I\rightarrow\mathbb{C}$ gegeben.
Unter einer Lösung versteht man eine n-mal differenzierbare Funktion $y: I\rightarrow\mathbb{C}$, die die Bedingung (L) erfüllt.
n heißt die **Ordnung der Differenzialgleichung**, q ist die **Inhomogenität**.

Ferner heißt die Differenzialgleichung

(H) $y^{(n)}+a_{n-1}\,y^{(n-1)}+\ldots+a_1\,y'+a_0\,y=0$

homogene Gleichung.

Operatorschreibweise:

$P(x)=x^n+a_{n-1}\,x^{n-1}+\ldots+a_1\,x+a_0$ Polynom

Definiert man für eine n-mal differenzierbare Funktion f:
$P(D)\,f:=(D^n+a_{n-1}\,D^{n-1}+\ldots+a_0)\,f=f^{(n)}+a_{n-1}\,f^{n-1}+\ldots+a_0\,f;$

Beispiel: $P(D)\,e^{\lambda x}=P(\lambda)\,e^{\lambda x}$;
$D^n\,e^{\lambda x}=\lambda^n\,e^{\lambda x}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

D^n = n-fache Ableitung

***Bemerkung**: Es gilt* $P_1(D)(P_2(D)\,f)=(P_1\,P_2)(D)\,f=(P_2\,P_1)(D)\,f$.

Lemma: Sind y_1 und y_2 Lösungen von (L), dann ist y_2-y_1 Lösung von (H).

Beweis: $P(D)(y_2-y_1)=q-q=0$;

Lemma: Aus einer Lösung y_0 von (L) entsteht jede weitere Lösung y durch Addition einer Lösung y_H der (H).

Beweis: $P(D)\,y_0=q(x)$;
$P(D)\,y_H=0$;
$P(D)(y_0-y_H)=q(x)$ wobei $(y=y_0+y_H)$;

Die Ermittlung <u>aller</u> Lösungen von (L) spaltet sich dabei in folgende Teilaufgaben:

1. Bestimme alle Lösungen von (H)
2. Bestimme wenigstens eine Lösung, die „**partikuläre Lösung**" der (L)

Lemma: Die Linearität und Homogenität von (H) implizieren, dass jede Linearkombination $c_1\ y_1 + \ldots + c_k\ y_k\ (c_i \in \mathbb{C})$ von Lösungen $y_1, \ldots, y_k$ der Gleichung (H) auch eine Lösung ist.

Bemerkung**: Die Gesamtheit der komplexen Lösungen von (H) bildet einen sog.* ***Vektorraum *L über* $\mathbb{C}$.

11.2 Eindeutigkeitssatz

Ein durch (L) beschriebener Vorgang involviert häufig noch die Vorgabe um n Anfangswerten:
$y(x_0),\ y'(x_0), \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)$
an einem $x_0 \in I$.

Beispiel: n = 2, x = Zeit, dann ist $y(t_0)$ Anfangswert, $y'(t_0) = \dot{y}(t_0)$ Anfangsgeschwindigkeit, unf (L) ist die Newton'sche Gleichung:
$m\ y'' = F$;
$m\ \ddot{y} = F$;

Lemma: Sei $Y : I \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall I. Genügt Y auf I der Ungleichung $|Y'| \leq C\ |Y|$ mit $C \in \mathbb{R}_+$, und gilt $Y(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in I$, so folgt Y = 0.

Beweis:
a) hier nur für den Fall $Y \geq 0$; reelle Allg. Fälle siehe Königsberger. $f := Y\ e^{-C\,x}$ wegen $f' = e^{-C\,x}(Y' - C\ Y) \leq 0$, d.h. f ist monoton fallend. Hat f in x_0 eine Nullstelle $\Rightarrow f \leq 0$ für $x > x_0 \Rightarrow Y \leq 0 \Rightarrow x \geq x_0 \Rightarrow Y = 0$.
$g := Y\ e^{C\,x} \Rightarrow Y(x) = 0$ für $x \leq x_0$.

Eindeutigkeitssatz 1: Seien $y_1, y_2 : I \to \mathbb{C}$ Lösungen von (L) mit gleichen Anfangswerten an einer Stelle $x_0 \in I$: $y_1^{(k)}(x_0) = y_2^{(k)}(x_0) \quad k = 0, \ldots, n-1$.
Dann gilt: $y_1(x) = y_2(x) \quad \forall\ x \in I$.

Beweisidee: Man verwendet obiges Lemma mit $Y := \sum_{k=0}^{n-1} |y^{(k)}(x)|^2$ mit $y^{(k)} := y_2^{(k)} - y_1^{(k)}$.

Folgerung:

(i) Sind $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n linear unabhängige Lösungen von (H), so ist jede weitere Lösung y eine Linearkombination $y = c_1\ y_1 + \ldots + c_n\ y_n$ mit $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$.

***Bemerkung**: Geg:* $y_1, \ldots, y_n$.

Das y_i heißt **linear abhängig**, wenn $y_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} d_j\ y_j;\quad d_j \in \mathbb{C}$.

Beweis: folgt aus dem Eindeutigkeitssatz und linearer Algebra.

(ii) Der komplexe Vektorraum L aller komplexer Lösungen der homogenen Differenzialgleichung (H) hat die Dimension $\leq n$.

11.3 Ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung

Lösungsansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$.

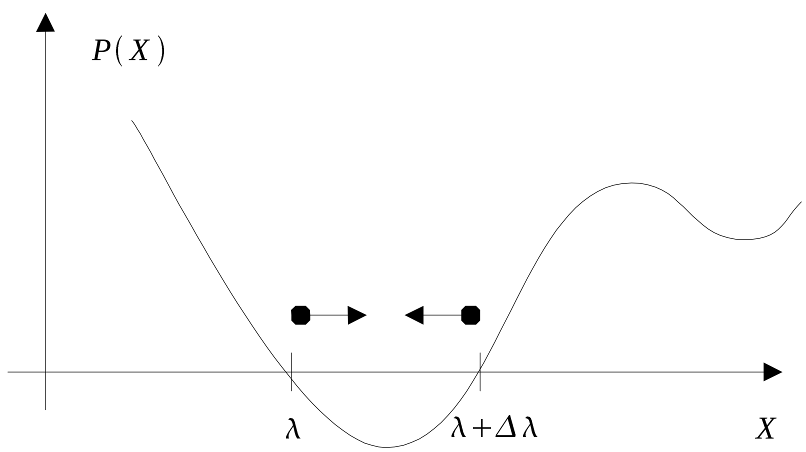
Dieser Ansatz löst (H) genau dann, wenn $(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda x} = 0$, d.h. wenn λ Nullstelle des Polynoms $P(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

P heißt **charakteristisches Polynom der DG**.
(Englisch: ODE (ordinary differential equation), PDE (partial differential equation))

Hat P(x) n verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, so hat man in $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ n verschiedene Lösungen von (H).
Im unten folgenden Satz wird gezeigt, dass sie auch linear unabhängig sind. Sie bilden daher eine Basis des Raums aller Lösungen von (H).

<u>Fall mehrfacher Nullstellen</u>: P hat dann < n Nullstellen, aber es gibt wieder n linear unabhängige Lösungen, da man jeder k-fachen Nullstelle λ neben $e^{\lambda x}$ weitere (k - 1) linear unabhängige Lösungen zuordnen kann.

Heuristische Herleitung: (griech. heuristische Betrachtung = Plausibilitätsbetrachtung)
Beispielsweise 2-fache Nullstelle, wir betrachten diese als Grenzlage benachbarter Nullstellen λ und $\Delta \lambda$.



$\Delta \lambda \neq 0$: $e^{\lambda x}$ und $e^{(\lambda + \Delta \lambda) x}$:

auch die Linearkombination $\dfrac{e^{(\lambda+\Delta\lambda)x} - e^{\lambda x}}{\Delta \lambda} = \dfrac{\cancel{1} + \cancel{\Delta \lambda x} + \dfrac{(\Delta \lambda x)^2}{2!} + \ldots - 1}{\Delta \lambda} \underset{\Delta \lambda \to 0}{\rightarrow} x e^{\lambda x}$

Bei mehrfachen Nullstellen sind die Faktoren $e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \ldots, x^{4-1} e^{\lambda x}$ auch Lösung der Differenzialgleichung (H).

Satz 2 (Fundamentalsystem):
Sei P das charakteristisches Polynom der Gleichung (H). Seien $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ die verscheidenen Nullstellen von P und $k_1, \ldots, k_r$ deren jeweilige Vielfachheiten. Dann hat (H) folgende n linear unabhängige Lösungen:

Zu λ_1 die k_1 Lösungen $e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^r e^{\lambda_1 x}$

$\vdots$
Zu λ_r die k_r Lösungen $e^{\lambda_r x}$, $x\, e^{\lambda_r x}$, … , $x^{k\, r-1}\, e^{\lambda_r x}$

Jede Lösung von (H) ist eine Linearkombination dieser n Lösungen.

Folgerung: Die Gleichung (H) besitzt zu beliebig gegebenen Anfangswerten $(\alpha_0 , \dots , \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ bei x_0 **genau eine Lösung** y mit $y^{(k)}(x_0) = \alpha_k$, $\quad k = 0 , \dots , n-1$.

Beispiel: $y^{(4)} - 3\, y^{(3)} + 3\, y'' - y' = 0$;
charakteristisches Polynom $\lambda^4 - 3\,\lambda^3 + 3\,\lambda^2 - \lambda = \lambda \cdot (\lambda - 1)^3 = 0$;
Nullstellen: 0 ist einfache, 1 ist dreifache Nullstelle;
Fundamentalsystem: $e^0 = 1$, e^x , $x\, e^x$, $x^2\, e^x$

Beispiel: Überdämpfte Schwingung

$\ddot{y}+6\,\dot{y}+9\,y=0$

Auslenkung y(t)

Anfangsbedingung: $\begin{array}{l} y(t=0)=0 \\ \dot{y}(t=0)=1 \end{array}$

Charakteristisches Polynom: $\begin{array}{l} \lambda^2+6\lambda+9=0 \\ (\lambda+3)^2=0 \Rightarrow \lambda=-3 \end{array}$ doppelte Nullstelle

Fundamentalsystem: $e^{-3t}, t\, e^{-3t}$

$y=c_1 e^{-3t}+c_2 t\, e^{-3t}$

$y(0)=0=c_1$

$\dot{y}=-3\,c_1 e^{-3t}+c_2 e^{-3t}(1-3t)$

$\dot{y}(0)=1=-3c_1+c_2 \Rightarrow c_2=1 \Rightarrow y(t)=te^{-3t}$

Reelle Lösungen: Seien die Koeffizienten der Differentialgleichung $P(D)\,y=q$ reell: $a_{0,} \dots , a_{n-1} \in \mathbb{R}$

Lemma: Sowohl der Realteil u als auch der Imaginärteil v einer komplexen Lösung $z=u+i\,v$ der Gleichung (H) sind Lösungen von (H).

Beweis: Lösung z. $z^{(k)}=u^{(k)}+i\,v^{(k)}$ impliziert $P(D)\,z=0$

$\left[u^{(n)}+a_{n-1} u^{(n-1)}+\ldots+a_0 u\right]+i\left[v^{(n)}+a_{n-1} v^{(n-1)}+\ldots+a_0 v\right]=0$

Die Summen in der [...] sind reelle Funktionen, folglich Null.

Beispiel: $y''-2y'+5y=0$

Charakteristisches Polynom: $\begin{array}{l} \lambda^2-2\lambda+5=0 \\ \lambda_1=1+2i,\ \ \lambda_2=1-2i \end{array}$

Komplexes Fundamentalsystem: $e^{(1+2i)x}$, $e^{(1-2i)x}$

Reelles Fundamentalsystem: $e^x \cos 2x$, $e^x \sin 2x$

Re $e^{2ix}=\cos 2x$ $[e^{2ix}=\cos 2x+i \sin 2x]$

$\text{Re}\,(e^x e^{2ix}) = e^x \cos 2x$

Mögliche Fundamentalsysteme:

Re y_1, Im y_2

Re y_1, Im y_1

y_1+y_2, y_1-y_2

11.4 Berechnung einer partikulären Lösung bei speziellen Inhomegenitäten

P(D) y = q

Satz 3: q habe die Gestalt: $q(x)=\left(b_0+b_1 x+\ldots+b_m x^m\right) e^{\mu x}$ und μ sei eine k-fache Nullstelle von P (k=0 bedeute hier $P(\mu)\neq 0$). Dann besitzt P(d)y=q eine Lösung $y(x)=\left(c_0+c_1 x+\ldots+c_m x^m\right) x^k e^{-\mu x}$ und im Fall m=0 die Lösung $y(x)=\frac{b_0}{p^{(k)}(\mu)} x^k e^{\mu x}$.

Beweis: Durch Induktion. Hier nur m=0.

Betrachten für beliebiges k-mal differenzierbares f und $\lambda \in \mathbb{C}$

$(D-\lambda)(f e^{\lambda x}) \quad D=\frac{d}{dx}$

$=f' e^{\lambda x}+\lambda f e^{\lambda x}-\lambda f e^{\lambda x}=f' e^{\lambda x}$

$(D-\lambda)^k (f e^{\lambda x})=f^{(k)} e^{\lambda x}$ (*)

Nun gilt für ein Polynom P(x) mit k-facher Nullstelle an $x=\mu$:

$P(x)=Q(x)(x-\mu)^{k,} \quad Q(\mu)\neq 0$

Daher gilt auch $P(D)=Q(D)(D-\mu)^k$

Daher folgt $P(D)(x^k e^{\mu x})=Q(D)(D-\mu)^k (x^k e^{\mu x})$ (wegen (*) = $k!\, e^{\mu x}$

$=Q(D)(k!\, e^{\mu x})=k!\, Q(\mu) e^{\mu x}=P^{(k)}(\mu) e^{\mu x}=P^{(k)}(\mu)=\frac{d^k P(x)}{dx^k}\Big|_{x=\mu}$)

Beispiel: $y'''-y'=e^{x;} \quad q(x)=e^x$

$P(\lambda)=\lambda^3-\lambda=\lambda(\lambda^2-1)=0$

$\lambda_1=0, \quad \lambda_2=1, \quad \lambda_3=-1$

Hier <u>m=0</u>, μ=1, k=1 da $P(\mu=1)=0$

d.h μ ist einfache Nullstelle von P

$y=\frac{1}{P'(1)} x^1 e^{x;} \quad P'(\lambda)=3\lambda^2-1; \quad P'(\lambda=1)=2; \; y=\frac{1}{2} x e^x$

Beispiel: $y'''-y'=q=x^2 \quad (e^{0x})$

$m=2, \quad \mu=0, \quad k=1$ da $P(0)=0.$

$P(\lambda)=0$ bei $\lambda=0,1,-1$

Ansatz der Lösung:

$y=\left(c_2 x^2+c_1 x+c_0\right) x^1 e^{0x}$ (**)

$q(x)=(b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m)e^{\mu x}=x^2$

$\Rightarrow b_0=0, b_1=0, b_2=1, \mu=0$

$P(\lambda)=\lambda^3-\lambda$

(**) Einsetzen in DG:

$y'''-y'=6c_2-3c_2x^2-2c_1x-c_0=x^2$

Koeffizientenvergleich: $6c_2-c_0=0;\ \ 2c_1=0;\ \ -3c_2=1\Rightarrow c_2=-\frac{1}{3},\ \ c_1=0,\ \ c_0=-2$

Ergänzung (Superposition): Die Inhomogenität sei eine Summe $q=c_1q_1+c_2q_2+\ldots+c_rq_{r,}\ \ c_k\in\mathbb{C}$

Seien $y_{1,}\,y_{2,}\ldots,y_r$ der Reihe nach Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung $P(D)y=q_k$ für k=1,2,3,...,r. Dann ist die Linearkombination $y=c_1y_1+\ldots+c_ry_r$ eine Lösung von P(D)y=q.

Beispiel: $y'''-y'=3x^x+5e^{3x}$

1. $y'''-y'=3e^x$
2. $y'''-y'=e^{3x}$

y = Lösung von (1) + 5 mal Lösung von 2

11.6 Stammfunktionen: Berechnung partikulärer Lösungen durch Variation der Konstanten

Beliebige stetige Inhomogenitäten. Die Lösungen könne zurückgeführt werden auf das Lösen von DG elementarster Art, nämlich y'=q(x). Die Lösungen solcher DG heissen Stammfunktionen.

Definition: Unter einer **Stammfunktion zu einer Funktion** $f: I\rightarrow\mathbb{C}$ auf einem Intervall I versteht man eine Funktion $F: I\rightarrow\mathbb{C}$ so dass
(i) F ist stetig
(ii) F ist differenzierbar ausserhalb einer höchstens abzählbaren „Ausnahme“-Menge $A\subset I$ und es gilt $F'(x)=f(x)\ \ \forall x\in I\setminus A$

Beispiel:

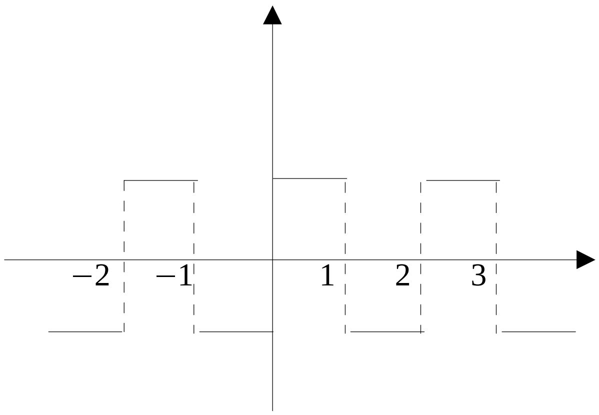
f	*F*
x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$ 1
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctg\ x$

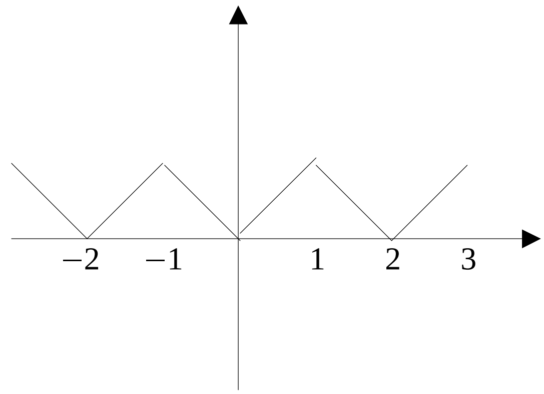
f	***F***
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh} x$ in $(1,\infty)$

Beispiel mit Ausnahmemenge: $A=Z$

$$f(x):=\begin{cases} 1 & \text{falls } n\le x<n+1 \text{ mit geraden n} \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(x):=\begin{cases} x-n & \text{falls } n\le x<n+1 \text{ mit geraden n} \\ n+1-x & \text{falls } n\le x\le n+1 \text{ mit ungeraden n} \end{cases}$$





Folgerungen:

1) Sind F, G Stammfunktionen zu f, g $\Rightarrow$ aF + bG ist Stammfunktion zu af + bg $(a, b\in\mathbb{C})$.

2) Mit F ist auch F + const eine Stammfunktion zu f (Ableitung der Konstante ist 0).

3) Sind $F_1, F_2 : I\to\mathbb{C}$ Stammfunktionen zu $f: I\to\mathbb{C}$, so ist $F_1-F_2=const$

Einschub:

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem (2x2):

$a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2$

für $x_1, x_2\in\mathbb{C}$ gesucht:

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2\end{pmatrix}$ (Lösen: siehe obige Gleichung, gliedweises Multiplizieren)

Zahl der Spalten der Matrix a = Zahl der Zeilen des Vektors x = Zahl der Unbekannten

Satz 4 (Variation der Konstanten):

Seien $y_1,\dots,y_n$ eine Lösungsbasis zur homogenen Differenzialgleichung $P(D)\,y=0$ der Ordnung n. Dann gilt:

(i) Für eine beliebige Funktion q(x) hat das (n, n)-Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_{1'} & y_{2'} & \cdots & y_{n'} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ q \end{pmatrix}$$

eine Lösung $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

(ii) Sind $U_1, U_2, \ldots, U_n$ differenzierbare Stammfunktionen zu $u_1, u_2, \ldots, u_n$ auf I, so ist dort $y_0 = U_1\ y_1 + U_2\ y_2 + \ldots + U_n\ y_n$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL $P(D)\ y = q$.

Bemerkung: *Für beliebiges $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{N}$ ist $c_1\ y_1 + c_2\ y_2 + \ldots + c_n\ y_n$ eine Lösung der homogenen DGL. Wenn man diese Konstanten c_i durch geeignete Funktionen $U_1, \ldots, U_n$ ersetzt, erhält man eine partikuläre Lösung. Daher nennt man die Methode* ***Variation der Konstanten****.*

Beispiel: $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$

i) $y'' + y = 0$; charakteristisches Polynom: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$
homogene Lösung: $y = e^{i x}, e^{-i x}$; $y = \sin x, \cos x$ (Linearkombination!)

ii) Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{}' & y_2{}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\cos x} \end{pmatrix};$$

$$\sin x\ u_1 + \cos x\ u_2 = 0$$

$$\cos x\ u_1 - \sin x\ u_2 = \frac{1}{\cos x};$$

Lösung: $u_1 = 1$, $u_2 = -\tan x$

Stammfunktion:

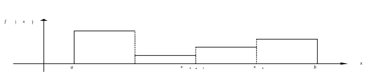
$U_1 = x$; $U_2 = \ln |\cos x|$

$\Rightarrow\ y_0(x) = x \sin x + (\ln |\cos x|) \cos x$

12. Integralrechnung

12.1 Treppenfunktionen und ihre Integration

Definition: $\phi : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt **Treppenfunktion**, wenn $\exists$ Punkte $x_0, \ldots, x_n$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, $(a, b \in \mathbb{R})$ $\vdots$ ϕ ist in jedem offenen Teilintervall (x_{k-1}, x_k) konstant.

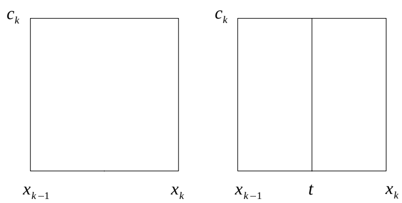


Die Funktionswerte in den Teilpunkten $x_0, \ldots, x_n$ unterliegen keiner Einschränkung. Eine Menge Z von Punkten $x_0, \ldots, x_n$ wie angegeben nennt man eine **Zerlegung** von [a, b]. Den Vektorraum der Treppenfunktion auf [a, b] bezeichnen wir mit T[a, b].

Definition: Hat $\phi : [a, b] \to \mathbb{C}$ im Teilintervall (x_{k-1}, x_k) den konstanten Wert c_k, so definiert man das **Integral einer Treppenfunktion**:

$$\int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{k=1}^{n} c_k \,\Delta x_k \quad (\Delta x_k := x_k - x_{k-1})$$

Lemma: Für gegebene Treppenfunktion ϕ ist das Integral von der Wahl der Zerlegung unabhängig.

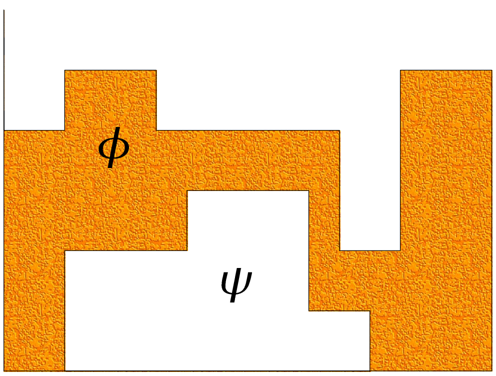


Beweis: Eine weitere Zerlegung entsteht durch Einführung zusätzlicher Teilungspunkte. Fügen wir z.B. t zwischen x_{k-1} und x_k ein, so ist der Summand zu ersetzen durch:

$$c_k(x_k - x_{k-1}) \to c_k(t - x_{k-1}) + c_k(x_k - t) = c_k(x_k - x_{k-1})$$

Lemma: Für Treppenfunktionen ϕ, ψ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $\int_a^b (\alpha\phi + \beta\psi)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b \phi\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b \psi\,\mathrm{d}x$ (**Linearität**)
2. $\left|\int_a^b \phi\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |\phi|\,\mathrm{d}x \le (b-a)\,\|\phi\|$ (**Beschränktheit**)
3. Sind $\phi, \psi \in \mathbb{R}$ und $\phi \le \psi$, so gilt: $\int_a^b \phi\,\mathrm{d}x \le \int_a^b \psi\,\mathrm{d}x$ (**Monotonie**)



Beweis: Es gibt eine Zerlegung von [a, b] derart, dass sowohl ϕ als auch ψ auf den offenen Teilintervallen konstant sind. Die Behauptungen sind dann einfache Aussagen über Summen.

12.2 Regelfunktionen und ihre Integration über kompakte Intervalle

Definition: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes oder geschlossenes Intervall (a, b) oder [a, b] oder (a, b] usw. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ heißt **Regelfunktion auf I**, wenn
(i) f hat sowohl einen linksseitigen als auch einen rechtsseitigen Grenzwert

$\forall\ x \in (a, b)$
(ii) im Falle $a \in I$ hat f in a einen rechtsseitigen und im Falle $b \in I$ hat f in b einen linksseitigen Grenzwert.

***Bemerkung**: Man bezeichnet den $\mathbb{C}$ -Vektorraum aller Regelfunktionen auf I mit R(I).*

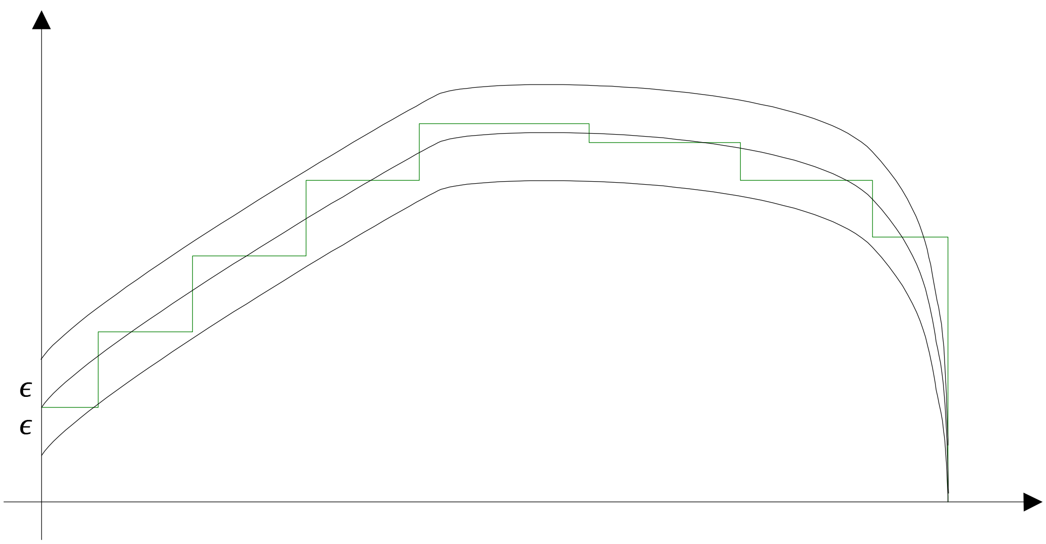
Beispiel:

1) Jede stetige Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine Regelfunktion

2) Jede monotone Funktion $g : I \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine Regelfunktion

Approximationssatz: Eine Funktion f auf einem [a, b] ist genau dann eine Regelfunktion, wenn $\forall\ \epsilon > 0\ \exists$ Treppenfunktion $\phi \in T[a, b] : \|f - \phi\| \leq \epsilon$, d.h.
$|f(x) - \phi(x)| \leq \epsilon \quad \forall\ x \in [a, b]$.
ϕ nennen wir eine ϵ **-Approximation von f**.

Gleichwertig formuliert: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann Regelfunktion, wenn $\exists$ Folge von Treppenfunktion ϕ_n auf [a, b] $:\ \|f - \phi_n\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.



***Bemerkung**: Geometrisch bedeutet $\|f - \phi\| \leq \epsilon$: Der Graph ϕ verläuft in einem ϵ -Streifen um den Graphen f:*

Beweis:

1) f ist Regelfunktion $\rightarrow$ f ist durch ϕ ϵ -approximierbar. Durch Intervallschachtelung.

2) Sei f ϵ -approximierbar $\Rightarrow$ Beweis der Existenz des rechtsseitigen Grenzwertes in einem beliebigen $x_0 \in [a, b)$: Zu $\epsilon > 0$ wählen wir eine Treppenfunktion ϕ mit $\|f - \phi\| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Sei weiter (x_0, t) ein Intervall, auf dem ϕ konstant sei. Für beliebige $x, y \in (x_0, t)$ = Umgebung von x_0 gilt dann:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \phi(x)| + |\underbrace{\phi(y)}_{=\phi(x)} - f(y)| \leq \epsilon$$

Nach dem Cauchy'schen Konvergenzkriterium (Kapitel 7.8) besitzt f somit einen rechtsseitigen Grenzwert.

Korollar: $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ ist genau dann Regelfunktion, wenn sie eine auf [a, b] normal konvergente Reihendarstellung $f=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k$ mit $\psi_k\in T[a,b]$ besitzt.

Folgerung: Jede Regelfunktion $f:I\to\mathbb{C}$ ist mit Ausnahme höchstens abzählbar vieler Stellen stetig. Insbesondere gilt das für jede monotone Funktion $g:I\to\mathbb{R}$.

Beweisskizze: Folgt daraus, dass jede Treppenfunktion ψ_k höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen hat.

Definition (Integration einer Regelfunktion): Sei $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ eine Regelfunktion mittels einer Folge (φ_n) von Treppenfunktionen auf [a, b] mit $\|f-\varphi_n\|\to 0$ für $n\to\infty$ setzt man $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Zur Rechtfertigung dieser Definition muss man zeigen:

a) Der Limes existiert.

***Bemerkung**: $\int_a^b \varphi_N\,\mathrm{d}x$ bildet eine Cauchy-Folge*

b) Der Limes hängt nicht von der Wahl der Approximationsfolge ab

Folgerung: Das Integral ist insbesondere für jede stetige sowie für jede monotone Funktion auf [a, b] definiert. Dagegen ist für $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ mit $f(x):=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ das Integral nicht erklärt.

Satz: Für Regelfunktionen f, g auf [a, b] und Zahlen $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ gilt:

a) $\int_a^b(\alpha f+\beta g)\,\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f\,\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g\,\mathrm{d}x$ (**Linearität**)

b) $\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b|f|\,\mathrm{d}x\le(b-a)\,\|f\|$ (**Beschränktheit**)

c) $\int_a^b f\,\mathrm{d}x\le\int_a^b g\,\mathrm{d}x$ falls $f\le g$ (**Monotonie**)

Beweisidee: Treppenfunktion

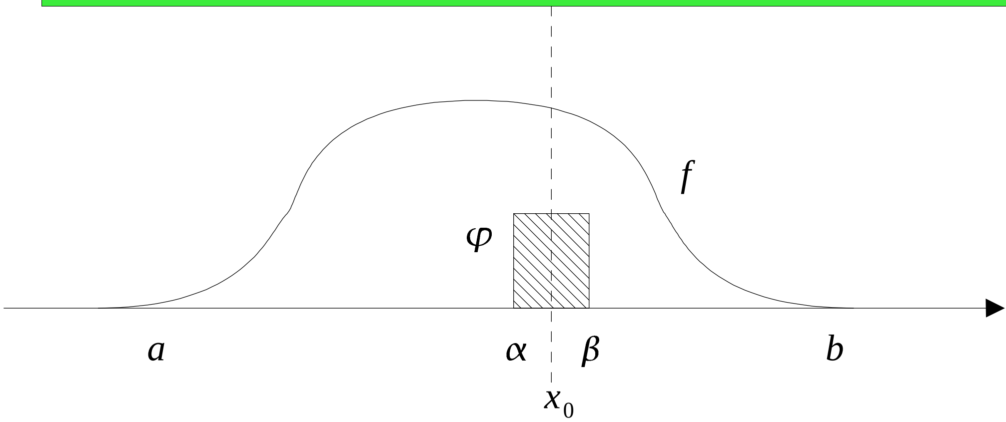
Satz: Sei $a<b<c$ und sei f eine Regelfunktion auf [a, c]. Dann gilt:

(*) $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$

Beweisidee: Offenbar richtig für Treppenfunktionen

Zusatz-Definition: Damit (*) auch bei beliebiger Lage der Punkte a, b, c gelten, definiert man $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x:=0$ und $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x:=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, falls $b<a$.

Lemma: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Ist $f\geq 0$ und ist $f(x_0)>0$ für ein $x_0\in[a,b]$, so gilt $\int_a^b f(x)>0$.



Beweis: Sei $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ mit $f(x)>\frac{1}{2}f(x_0)$ für $x\in[\alpha,\beta]$.

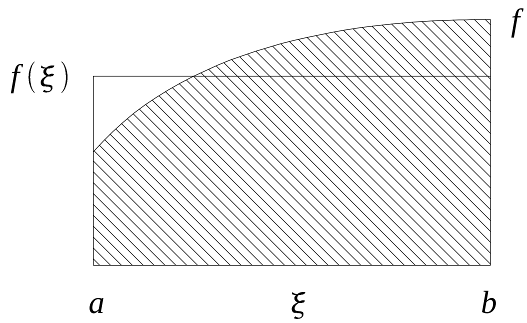
$$\varphi:=\begin{cases}\frac{1}{2}f(x_0) & x\in[\alpha,\beta]\\ 0 & x\in[a,b]\setminus[\alpha,\beta]\end{cases}\quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \underset{\text{Monotonie}}{\geq} \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x=(\beta-\alpha)f\frac{(x_0)}{2}>0.$$

Mittelwertsatz:

Bemerkung: *Für beliebige komplexe Regelfunktionen* $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq|b-a|\,\|f\|$

Stetige, reelle Funktionen: $\xi\in[a,b]\,;\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=|b-a|\cdot f(\xi)$

Geometrisch:



Mittelwertsatz: Es seien $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $p:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Regelfunktion mit $p\geq 0$. Dann existiert ein $\xi\in[a,b]\vdots\int_a^b f(x)\,p(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$.

Bemerkung: *Insbesondere p = 1. p nennt man* ***Gewichtsfunktion***.

Beweis: Siehe Königsberger

12.3 Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Hauptsatz: Sei f eine Regelfunktion auf einem Intervall I. Ein Punkt $a \in I$ sei fest gewählt, und für $x \in I$ setze man $F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Dann gilt:
(i) F ist eine Stammfunktion zu f auf I; genauer: F ist an jeder Stetigkeitsstelle x_0 von f differenzierbar mit $F'(x_0) = f(x_0)$
(ii) Mit einer beliebigen Stammfunktion Φ zu f auf I gilt für $a, b \in I$:
$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(b) - \Phi(a) =: \Phi|_a^b$

Beweisskizze:

(i) Man kann zeigen, dass F auf jedem kompakten Teilintervall $K < I$ Lipschitzstetig ist, daraus folgt dann: $\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \epsilon \Rightarrow F'(x_0) = f(x_0)$

(ii) Für F gilt des trivial. Jede weitere Stammfunktion von f, Φ, muss die Form $\Phi = F + c,\ c \in \mathbb{C}$ haben. Dies folgt aus dem Schrankensatz (Kapitel 9.4: $\Phi' = F' \Leftrightarrow$ Differenz konstant). Daher $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Bemerkung I*: Der erste Teil des Satzes zeigt, dass jede Regelfunktion eine Stammfunktion besitzt und es gibt eine solche in Gestalt eines Integrals mit variabler oberer Grenze bei beliebig fixierter unterer Grenze.*

Bemerkung II*: Häufig gehört die Stammfunktion zu einer „anderen“ Funktionsklasse als der Integrand, z.B. ist* $f = \frac{1}{x}$ *eine rationale Funktion, aber* $F = \ln|x|$ *nicht. Gelegentlich erweitert die Bildung einer Stammfunktion den Vorrat bereits bekannter Funktionen, z.B.* $\frac{e^x}{x}$ *hat keine elementare Stammfunktion.*

Definition: Ist F eine Stammfunktion zur Regelfunktion f, so nennt man die Gesamtheit der Funktionen $F + c,\ c \in \mathbb{C}$ das **unbestimmte Integral** zu f und schreibt dafür $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Dieses Symbol wird aber auch zur Bezeichnung irgend einer konkreten Stammfunktion benützt.

Beispiele:

1) $\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + c \quad (a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}_+)$

$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|$

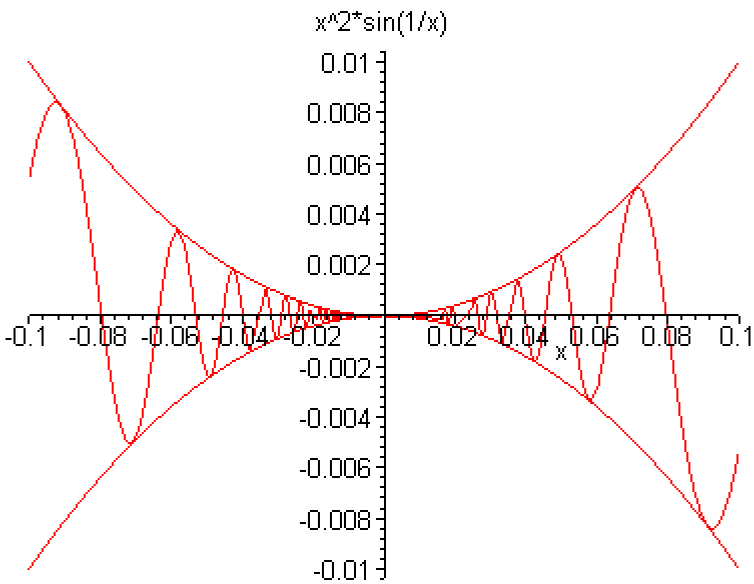
2) $\int e^{cx} \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{c} e^{cx} \quad (c \neq 0)$

3) $\int \cos x \, \mathrm{d}\, x = \sin x$
$\int \sin x \, \mathrm{d}\, x = -\cos x$

Aus 2) folgt z.B.: $\int_0^{2\pi} e^{ikx} \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{i\,k} \left(e^{2k\pi i} - e^0\right) = \begin{cases} = 0 & \text{für } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ = 2\pi & \text{für } k = 0 \end{cases}$

***Bemerkung 3:** Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion $u : I \to \mathbb{C}$ muss keine Regelfunktion sein.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$f'(x) = 2\,x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$.

Für $h \to 0$ ist $f'(h) = h \sin \frac{1}{h}$. Besitzt keinen Grenzwert! Und zwar weder rechtsseitigen noch einen linksseitigen. f' ist also keine Regelfunktion auf $\mathbb{R}$. Daher ist die Stammfunktion f zu f' nicht durch eine Integration nach dem Hauptsatz zu gewinnen. Dagegen gilt für ein stetig differenzierbares $u : I \to \mathbb{C}$ wegen dem 2. Teil des Hauptsatzes: $\int_a^x u'(t) \, \mathrm{d}\, t = u(x) - u(a)$

$\int u'(x) \, \mathrm{d}\, x = u(x)$.

Integrationsregeln

Mit dem Hauptsatz lassen sich die Produktregel und die Kettenregel der Differenzialrechnung in Integrationsregeln umsetzen. Formulieren Regeln für stetig differenzierbare Funktionen:

1. **Partielle Integration**

Für stetig differenzierbare $u, v: I \to \mathbb{C}$ gilt: $\int u\, v'\, \mathrm{d}\, x = u\, v - \int u'\, v\, \mathrm{d}\, x$, insbesondere $\int_a^b u\, v'\, \mathrm{d}\, x = u\, v\big|_a^b - \int_a^b u'\, v\, \mathrm{d}\, x \quad (a, b \in I)$

Beweis: $(u\, v)' = u'\, v + u\, v'$; $u\, v' = (u\, v)' - u'\, v$

Beispiel 1: Sei $a \neq -1$

$$\int x^a \cdot \ln x\, \mathrm{d}\, x = \frac{x^{a+1}}{a+1} \ln x - \frac{1}{a+1} \int x^{a+1} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}\, x = \frac{x^{a+1}}{a+1} \ln x - \frac{x^{a+1}}{(a+1)^2};$$

Beispiel 2:

Bei Integralen der Gestalt $\int x^n\, e^x\, \mathrm{d}\, x$, $\int x^n \cos x\, \mathrm{d}\, x$, $\int x^n \sin x\, \mathrm{d}\, x \quad n \in \mathbb{N}$ kann der Exponent durch partielle Integration erniedrigt werden:

$$I_n := \int x^n\, e^x\, \mathrm{d}\, x = x^n\, e^x - \int u\, x^{n-1}\, e^x\, \mathrm{d}\, x = x^n\, e^x - n\, I_{n-1}$$

rekursiv bis auf $I_0 = \int e^x\, \mathrm{d}\, x = e^x$

Beispiel 3:

Integrale der Funktionen $\cos^k x$, $\sin^k x$ für $k = 2, 3, \ldots$:

$$\int \cos^k x\, \mathrm{d}\, x = \int \underbrace{\cos^{k-1} x}_{=u}\, \underbrace{\cos x}_{=v'}\, \mathrm{d}\, x = \cos^{k-1} x \sin x + (k-1) \int \cos^{k-2} x \sin x \sin x\, \mathrm{d}\, x =$$

$$= \cos^{k-1} x \sin x + (k-1) \int \left(1 - \cos^2 x\right) \cos^{k-2} x\, \mathrm{d}\, x;$$

$$\Rightarrow \int \cos^k x\, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{k} \cos^{k-1} x \sin x + \frac{k-1}{k} \int \cos^{k-2} x\, \mathrm{d}\, x$$

2. **Substitutionsregel**

$f: I \to \mathbb{C}$ sei stetig und besitze eine Stammfunktion $F: I \to \mathbb{C}$. Weiters sei $t: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $t\left([a, b]\right) \subset I$. Dann ist $F \circ t$ eine Stammfunktion zu $\left(f \circ t\right) t'$ und es gilt:

$$\int_a^b f\left(t(x)\right) t'(x)\, \mathrm{d}\, x = \int_{t(a)}^{t(b)} f(t)\, \mathrm{d}\, t$$

Beweis: Erste Behauptung folgt aus der Kettenregel. Die zweite Behauptung folgt aus dem Hauptsatz. Nach diesem haben beide Seiten den Wert $F\left(t(a)\right) - F\left(t(b)\right)$.

Beispiel 1:

$$\int_a^b f(x+c)\, \mathrm{d}\, x = \int_{t(a)}^{t(b)} f(t)\, \mathrm{d}\, t \text{ (mit } t := x + c;\ t' = 1)$$

Beispiel 2: Sei $c \neq 0$

$$\int_a^b f(c \cdot x)\, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{c} \int_{ca}^{cb} f(t)\, \mathrm{d}\, t \text{ (mit } t := cx,\ t' = c)$$

Beispiel 3:

$$\int \frac{t'(x)}{t(x)}\, \mathrm{d}\, x = \ln |t(x)| \qquad \text{(mit } f(t) = \frac{1}{t})$$

Beispiel 4:

$$\int \frac{\mathrm{d}\, x}{a\, x^2 + b\, x + c}; \text{ Sei } c > b^2: \text{ Setze } t(x) := \frac{x+b}{\sqrt{c - b^2}} \quad \Rightarrow \quad t' = \frac{1}{\sqrt{c - b^2}}$$

$$\frac{1}{x^2+2\,b\,x+c}=\frac{1}{(x+b)^2+(c-b^2)}=\frac{\frac{1}{c-b^2}}{\frac{(x+b)^2}{c-b^2}+1}=\frac{1}{\sqrt{c-b^2}}\cdot\frac{t'(x)}{t^2(x)+1};$$

Somit: $\int\frac{\mathrm{d}\,x}{x^2+2\,b\,x+c}=\frac{1}{\sqrt{c-b^2}}\,arctg\,\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}$, da arctg die Stammfunktion von $\frac{1}{1+t^2}$ ist.

Beispiel 5:

Fall $c=b^2$

$$\int\frac{\mathrm{d}\,x}{x^2+b\,x+c}=\int\frac{\mathrm{d}\,x}{(x+b)^2}=-\frac{1}{(x+b)}$$

Beispiel 6:

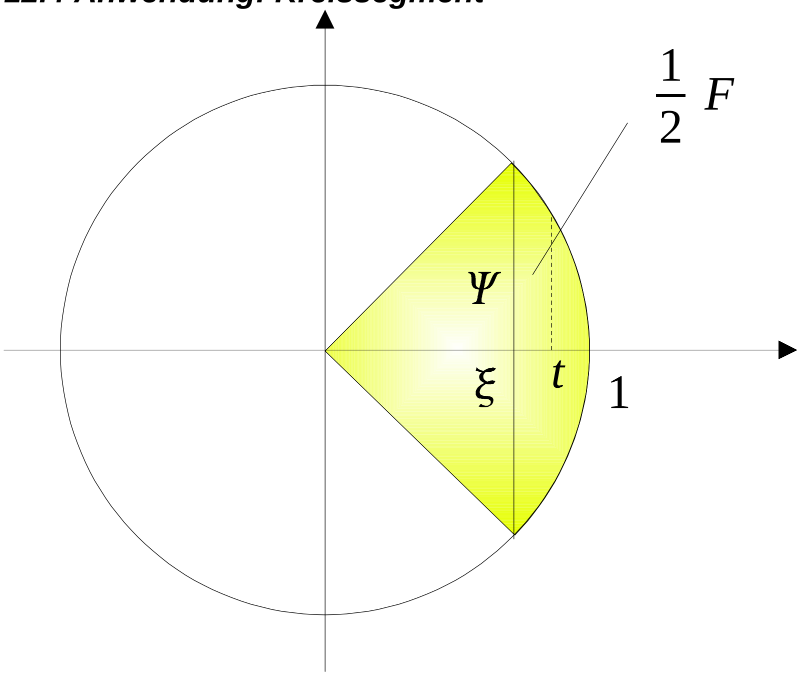
$c<b^2$

Schreiben wieder $x^2+2\,b\,x+c=(x+b)^2+(c-b^2)$ und setzen $d:=\sqrt{b^2-c}$:

$$\frac{1}{x^2+2\,b\,x+c}=\frac{1}{(x+b)^2-d^2}\underset{\text{PBZ}}{=}\frac{1}{2\,d}\left\{\frac{1}{x+b-d}-\frac{1}{x+b+d}\right\}$$

$$\int\frac{1}{x^2+2\,b\,x+c}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2\,\sqrt{b^2-c}}\cdot\ln\left|\frac{x+b-\sqrt{b^2-c}}{x+b+\sqrt{b^2-c}}\right|$$

12.4 Anwendung: Kreissegment



$$\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\left\{x\,\sqrt{1-x^2}+\arcsin\,x\right\}\qquad\text{auf }[-1\,,\,1]$$

Kreis: $\psi^2=1-\xi^2$

$$F = \psi \cdot \xi + 2 \int_{\xi}^{1} \sqrt{1-t^2}\, \mathrm{d}\, t = \xi \sqrt{1-\xi^2} + \left(t \sqrt{1-t^2} + \arcsin t \right)\Big|_{\xi}^{1} =$$

$$= \xi \sqrt{1-\xi^2} + \arcsin 1 - \xi \sqrt{1-\xi^2} - \arcsin \xi = \frac{\pi}{2} - \arcsin \xi = \arccos \xi = F$$

12.5 Integration elementarer Funktionen

I. Integration rationaler Funktionen

Satz: Jede rationale Funktion mit reellen Koeffizienten kann mittels rationaler Funktionen sowie des Logarithmus und des Arctangens integriert werden.

Beweis: Sei R eine solche rationale Funktion. Wegen der Eindeutigkeit der PBZ (4.3) und wegen $R(z) = \overline{R(\bar{z})}$ treten nichtreelle Nullstellen nur in Paaren konjugierter Nullstellen auf.

Sei z.B. α komplexe Nullstelle, dann ist auch $\bar{\alpha}$ Nullstelle.

$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2 - \alpha\, \Re(\alpha) \cdot x + \alpha\, \bar{\alpha}$

R ist also die Summe eines Polynoms sowie von Brüchen der Form:

(B_1) $\frac{1}{(x-a)^k}$ mit $a, A \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$

(B_2) $\frac{A}{(x-a)^k} + \frac{\bar{a}}{(x-\bar{a})^k}$ mit $a, A \in \mathbb{C}$, $a \notin \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$

Integration der Brüche in beiden Fällen für $k > 1$ wird bewerkstelligt durch

$\int \frac{\mathrm{d}\, x}{(x-a)^k} = \frac{1}{1-k} \frac{1}{(x-a)^{k-1}}$

Fall $k = 1$ und Typ (B_1) $\rightarrow \ln(x-a)$

Fall $k = 1$ und Typ (B_2): $\frac{A}{(x-a)} + \frac{\bar{A}}{(x-\bar{a})} = \frac{B\, x + C}{x^2 + 2\, b\, x + c}$ und $c > b^2$

Substitiution von Beispiel 4: $t := \frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}$ führt auf Integrale der Art $\frac{t}{t^2+1}$ bzw. $\frac{1}{t^2+1}$

II. Integration durch Zurückführen auf die Integration rationaler Funktionen

Integral	**Substitution**	**Führt Integral zurück auf**
$\int R\left(x, \sqrt[n]{a\, x + b}\right) \mathrm{d}\, x$	$t = \sqrt[n]{a\, x + b}$	$\int R\left(\frac{t^n - b}{a}, t\right) \frac{n}{a} t^{n-1}\, \mathrm{d}\, t$
$\left.\begin{array}{c} \int R\left(e^x\right) \mathrm{d}\, x \\ \int R(\cosh x, \sinh x) \end{array}\right\}$	$t = e^x$	$\int R(t) \frac{1}{t}\, \mathrm{d}\, t$
$\int R(\cos x, \sin x)\, \mathrm{d}\, x$	$t = \tan \frac{\phi}{2}$	$\cos \varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin \varphi = \frac{2\, t}{1+t^2}$
$\int R\left(x, \sqrt{a\, x^2 + b\, x + c}\right) \mathrm{d}\, x$ $(b^2 \neq x)$		
Nach quadratischer Ergänzung 3 Grundtypen:		

Integral	Substitution	Führt Integral zurück auf
$\int R\left(t, \sqrt{t^2+1}\right) \mathrm{d}\, t$	$t = \sinh\, u$	$\sqrt{t^2+1} = \cosh\, u$ $\mathrm{d}\, t = \cosh\, u\, \mathrm{d}\, u$
$\int R\left(t, \sqrt{t^2-1}\right) \mathrm{d}\, t$	$t = \pm\cosh\, u$	$\sqrt{t^2-1} = \sinh\, u$ $\mathrm{d}\, t = \pm\sinh\, u\, \mathrm{d}\, u$
$\int R\left(t, \sqrt{1-t^2}\right) \mathrm{d}\, t$	$t = \pm\cos\, u$	$\sqrt{1-t^2} = \sin\, u$ $\mathrm{d}\, t = \mp\sin\, u\, \mathrm{d}\, u$

III. Elliptische und andere nichtelementare Integrale

Unter einem **elliptischen Integral** versteht man ein Integral der Gestalt $\int R\left(x, \sqrt{P}\right) \mathrm{d}\, x$, wobei $R(x, y)$ eine rationale Funktion von x und y ist und P ein reelles Polynom 3. oder 4. Grades ohne mehrfache Nullstellen ist.

Elliptische Integrale sind in der Regel keine elementaren Funktionen.

Man kann diese elliptischen Integrale auf gewisse Grundtypen zurückführen, für die es Reihendarstellungen gibt (Abramowitz).

Beispiel: elliptisches Integral 1. Gattung

$$0 < k < 1 \quad F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \xi}}\, \mathrm{d}\, \xi$$

Name rührt von der Berechnung der Bogenlängen der Ellipse her.

$$\int \frac{\sin\, ax}{x}\, dx = ax - \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5 \cdot 5\,!} + \ldots \text{ “Integralsinus“}$$

$$\int \frac{e^{ax}}{x}\, dx = \ln\, x + \frac{ax}{1 \cdot 1!} + \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2\,!} + \ldots \text{ “Integralexponentialfunktion“}$$

$$\int \frac{dx}{\ln\, x} = \ln\, \ln\, x + \ln\, x + \frac{(\ln\, x)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(\ln\, x)^3}{3 \cdot 3!} + \ldots \text{ “Integrallogarithmus“}$$

12.6 Integration normalkonvergenter Reihen

Berechnung bestimmter Integrale oft durch geeignete Reihenentwicklungen möglich.

Satz: Eine auf [a,b] normal konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n := f$ von Regelfunktionen stellt eine Regelfunktion dar und es gilt $\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$

d.h. Summe und Integral sind vertauschbar.

Beweis: Folgt aus Approximationssatz. s. KB.

Beispiel: Vollständige elliptische Integral 1. Gattung $K(k) := F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}$

Kap 6.4: (Klausur !) $(1+z)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n$

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ n \end{pmatrix} k^{2n} \sin^{2n} x = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^{2x} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 x + \dots$$

Die Reihe der Norm besitzt für $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ die konvergente Majorante $\sum_{n=0}^{\infty} n^{2n}$ wegen $|k| < 1$

Es folgt: $k(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 n^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 \dots\right]$

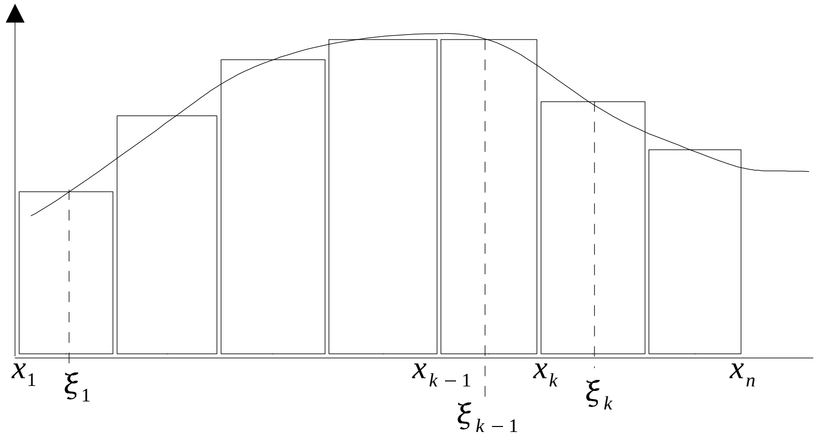
12.7 Riemannsche Summen

Definition: Geg. sei $f: [a,b] \to \mathbb{C}$. Weiter sein Z eine Zerlegung von [a,b] mit den Teilungspunkten x_0, ... , x_n und $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ beliebig gewählte Stellen. Dann heisst $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k \quad (\Delta x_k - x_{k-1})$ **Riemannsche Summe** für f bzgl. der Zerlegung Z und der „Stützstellen“ $\xi_{1,} \dots, \xi_n$.

Definition: Unter der **Feinheit einer Zerlegung** versteht man das Maximum der Längen der Teilintervalle $[x_{k-1}, x_k]$.

Satz: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Regelfunktion. Dann $\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \vdots$ Für jede Zerlegung von [a,b] der Feinheit $\leq \delta$ und jede Wahl von Stützstellen $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ gilt: $\left|\sum_1^n f(\xi_k) \Delta x_k - \int_a^b f(x)\, dx\right| < \varepsilon$

Beweis: Hier nur für Treppenfunktionen. $f = \varphi$. Ist $\varphi = \text{const}$, so gilt die Behauptung für $\delta\, |b-a|$. Ist φ nicht konstant und besitzt es m Sprungstellen, so setzen wir $\delta = \delta(\varepsilon, \varphi) := \frac{\varepsilon}{4\, m\, \|\varphi\|}$



Z sei eine beliebige Zerlegung von [a,b] der Feinheit $\leq \varphi$

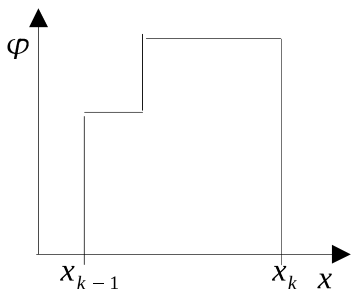
$$\sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k)\, \Delta x_k - \int_a^b \varphi\, dx = \sum_{k=1}^{n} \left[\varphi(\xi_k)\, \Delta x_k - \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi\, dx \right]$$

Enthält φ keine Sprungstelle in $[x_k - 1, x_k]$ so ist $\int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi\, dx = \varphi(\xi_k)\, \Delta x_k$

Enthält φ eine Sprungstelle so ist $\left| \varphi(\xi_k)\, \Delta x_k - \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi\, dx \right| \leq 2 \|\varphi\|\, \Delta x_k \leq 2 \|\varphi\| = \frac{\varepsilon}{2m}$

Da höchstens 2m Sprungstellen im Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ enthalten sein können,

$$\left| \quad \right| < \frac{\varepsilon}{2m} \cdot 2m = \varepsilon$$



Folgerung: Ist z_1, z_2, ... eine Folge von Zerlegungen des Intervalls [a,b] deren Feinheiten gegen Null gehen und ist S_n eine riemannsche Summe für die Regelfunktion f zur Zerlegung z_n, so gilt

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \int_a^b f(x)\, dx$$

12.8 Integration über nicht kompakte Intervalle, uneigentliche Integrale

Bisher nur [a,b]

Definition (Uneigentliches Integral): Sei f eine Regelunktion auf einem Intervall I mit Randpunkten a,b , wobei $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

1. Ist I = [a,b) mit $a \in \mathbb{R}$, so definiert man $\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta f(x)\,dx$ vorausgesetzt, der Grenzwert existiert. In dem Fall heisst das uneigentliche Intgral $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergent und der Grenzwert dessen Wert.
2. 2. Analog für I = (a,b] mit $b \in \mathbb{R}$
3. Ist I = (a,b), so definiert man $\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ falls für ein $c \in I$ - und damit für jedes $c \in I$ - die beiden rechts stehenden uneigentlichen Integrale konvergieren.

***Bemerkung**: Falls $a,b \in \mathbb{R}$, stimmt die Definiton des uneigentlichen Integrals mit der bisherigen Definition des Integrals über Regelfunktionen überein, da dies stetig von den Grenzen abhängt.*

Beispiel:

1) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ existiert genau dann, wenn s > 1, Wert = $\frac{1}{s-1}$

Beweis: $\int_1^\beta \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \frac{1}{s-1}\left(1-\beta^{1-s}\right) & s \neq 1 \\ \ln\beta & s = 1 \end{cases}$

$$\lim_{\beta \to \infty} \frac{1}{s-1}\left(1-\beta^{1-s}\right) = \frac{1}{s-1}$$

$$\lim_{\beta \to \infty} \ln\beta = \infty$$

2) $\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$ wenn x<1, Wert $\frac{1}{1-s}$

Beweis umgekehrt.

3) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi$

Beweis: c=0

$$\int_0^\beta \frac{dx}{1+x^2} = arctg\ \beta \underset{\beta \to \infty}{\to} \frac{\pi}{2}$$

$$\int_\alpha^0 \frac{dx}{1+x^2} = -arctg\ \alpha \underset{\alpha \to -\infty}{\to} \frac{\pi}{2}$$

4) $\int_0^\infty e^{-k\,x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{k}$ für $k > 0$

Beweis: $\int_0^\beta e^{-k\,x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{k}\left(1 - \underset{\beta\to\infty}{e^{-k\,\beta}} \xrightarrow{} 0\right) = \frac{1}{k}$ **;**

Majorantenkriterium: f sei Regelfunktion auf [a,b). Für eine Vergleichsfunktion g mit $|f| \le g$ auf [a,b) existiere $\int_a^b g(x)\,dx$.

Dann existiert auch $\int_a^b f(x)\,dx$.

Grenzwertkriterium: Für die Regelfunktionen f,g auf [a,b) mit q>0 existiere $\lim_{x\uparrow b}\frac{f(x)}{g(x)}$ sowie $\int_a^b g(x)\,dx$. Dann existiert auch $\int_a^b f(x)\,dx$.

Beweis: KB

Beispiel: Eulersche Gamma-Intgral

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1}\,e^{-x}\,dx \qquad (s > 0)$$

Behauptung: $\exists$

Beweis: In (0,1] Mayorante $f(x) := x^{s-1}$ $\int_0^1 x^{s-1}\,dx$ existiert.

In $[1, \infty)$ hat man als Vergleichsfunktion $g(x) := e^{\frac{-x}{2}}$

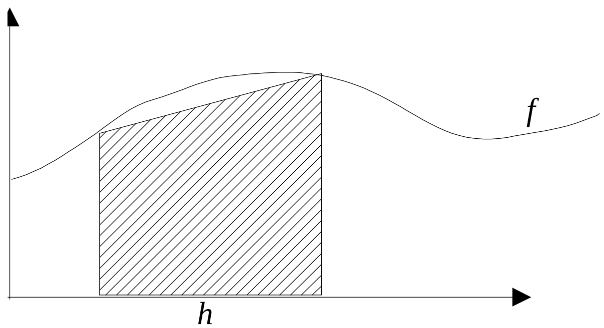
Es gilt: $\Gamma(s+1) = s\;\Gamma(s)$ für beliebiges s>0

$\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(s) = (s-1)!$ für $s \in \mathbb{N}$

12.9 Die eulersche Summenformel: Die Trapezregel

Eulersche Summenformel:
Ist $f:[0,n]\to\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$, stetig differenzierbar, so gilt:
$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k)=\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\big(f(0)+f(n)\big)+\int_0^n H(x)\,f'(x)\,\mathrm{d}x;$$
$$H(x):=x-[x]-\frac{1}{2} \text{ für } x\notin\mathbb{Z} \text{ und } H(k):=0 \text{ für } k\in\mathbb{Z}.$$



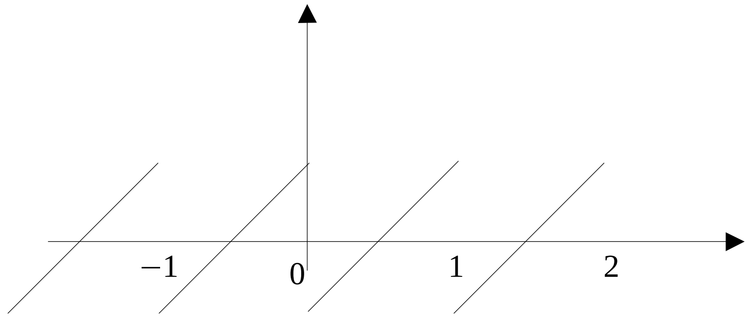
Beweis: durch partielle Integration

Trapezregel: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sei eine C^2-Funktion. Für eine äquidistante Teilung von $[a,b]$ in n Teilintervalle der Länge $h=\frac{b-a}{n}$ setze man

$$T(h):=h\left(\frac{f(a)}{2}+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(b-h)+\frac{f(b)}{2}\right).$$

Dann gilt: $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=T(h)-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\tau)\quad \tau\in[a,b]$.

Geometrische Deutung:



Beweis: Mittelwertsatz: Königsberger.

13. Geometrie differenzierbarer Kurven

13. 1 Parameterisierte Kurven

Definition: Eine **parameterisierte Kurve** im $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$$
$$t \to (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$$

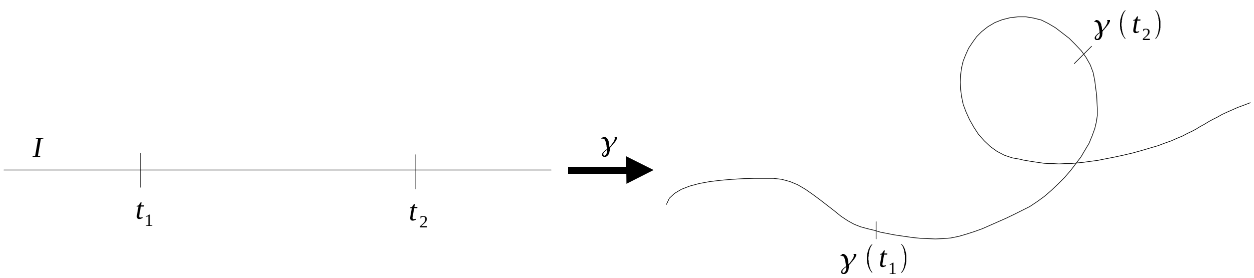
eines Intervalls I auf einen Vektor, dessen Komponenten $x_1, \dots, x_n : I \to \mathbb{R}$ stetig sind. γ heißt **differenzierbar** (**stetig differenzierbar**), wenn alle x_i differenzierbar (stetig differenzierbar) sind.
Das Bild $\gamma(I)$ heißt die **Spur** von γ.
Statt parameterisierter Kurve sagen wir auch kurz **Kurve**.

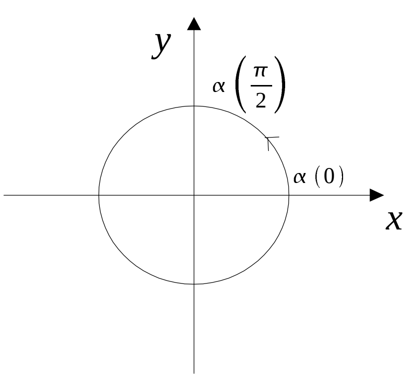
Beispiel 1:

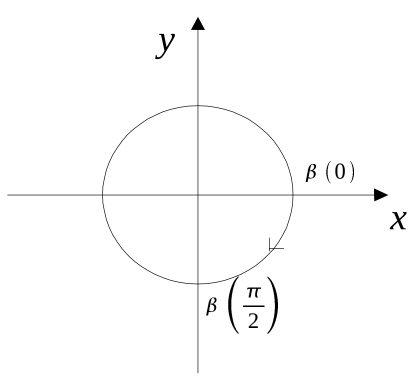
$\alpha(t) = (\cos t, \sin t)^T \quad t \in [0, 2\pi]$;
$\beta(t) = (\cos t, -\sin t)^T \quad t \in [0, 2\pi]$;

α und β definieren verschiedene Kurven, aber mit derselben Spur (Einheitskreis, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$).

α durchläuft Kreis im **mathematisch positiven Sinn = gegen Uhrzeigersinn**.





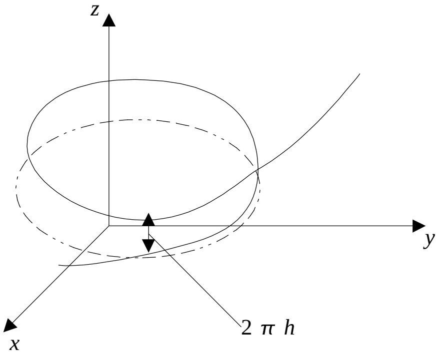


Beispiel 2: Schraubenlinie

$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, h\, t)^T \quad t \in \mathbb{R}$;

Spur = $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = r^2\}$;

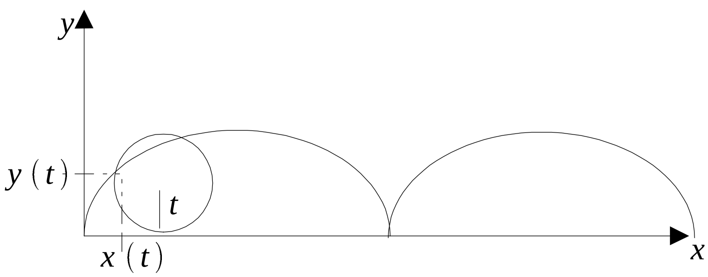
2π heißt die **Ganghöhe**



Beispiel 3: Zykloide

$x(t) = t - \sin t;$
$y(t) = 1 - \cos t;$

explizite Form: y in Abgängigkeit von x
parameterisierte Form: x in Abhängigkeit eines Parameters, y in Abhängigkeit eines Parameters



rollende Einheitsscheibe

Tangentialvektoren

Tagenten definiert man als Grenzlagen von Sekanten. Ein Vektor in Richtung der Sekante durch die Punkte $\gamma(t)$ und $\gamma(t+h)$ ist

$$\frac{1}{h}(\gamma(t+h) - \gamma(t)) =$$
$$= \left(\frac{x_1(t+h) - x_1(t)}{h}, \dots, \frac{x_n(t+h) - x_n(t)}{h}\right)^T;$$

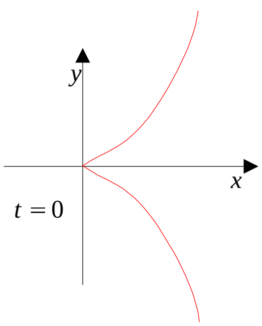
wobei wir komponentenweise den Limes $h \to 0$ bilden.

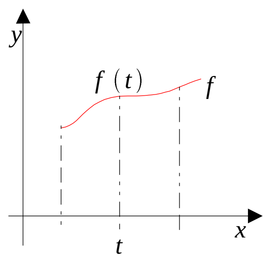
Definition: Ist $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar, so heissen $\dot{\gamma} := (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ der **Tangentialvektor** oder auch der **Geschwindigkeitsvektor der Kurve** $\dot{\gamma}$ an t und $\|\dot{\gamma}\| := \sqrt{x_1^2(t) + \ldots + x_n^2(t)}$ die **Geschwindigkeit**;
im Fall $\gamma(t) \neq 0$ heißt ferner $T_\gamma(t) := \gamma \frac{(t)}{\|\gamma(t)\|}$ der **Tangentialeinheitsvektor an t**.

Beispiel:
$\gamma(t) = (t^2 - 1,\ t^3 - t)^{T,}\ t \in \mathbb{R}$;
$\gamma(1) = \gamma(-1)$;
$\dot{\gamma}(1) = (2,\ 2)^T$;
$\dot{\gamma}(-1) = (-2,\ 2)^T$;

Bemerkung: *Die obige Norm heißt Abstands- oder Betragsnorm.*
$|(\vec{x})| \geq 0,\ |(\vec{x})| = 0 \equiv \vec{x} = 0,\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Definition: Eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heißt **regulär** an $t_0 \in I$, wenn $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$.
Sie heißt **regulär**, wenn sie an allen Stellen $t \in I$ regulär ist.





Beispiel: $\gamma(t) = (t^3,\ t^3)^T \quad t \in \mathbb{R}$ ist an $t = 0$ irregulär. Die Spur dieser Kurve ist aber Gerade $y = x$. Dagegen hat die Neilsche Parabel $t \to (t^2,\ t^3)^T$ bei $t = 0$ eine Spitze und ist dort irregulär.

Definition: Der **parameterisierte Graph** einer C^1 -Funktion (C^n ist der Vektorraum der n-mal stetig diffbaren Funktionen) $f\colon J \to \mathbb{R}$ ist die Kurve $\gamma_f : J \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma_f(t) := (t,\ f(t))^T \quad t \in J$.
Ihre Tangentialvektoren $\dot{\gamma}_f(t) := (1,\ f'(t))^T$ sind $\neq (0,\ 0)^T \quad \forall\ t$ und nicht vertikal.

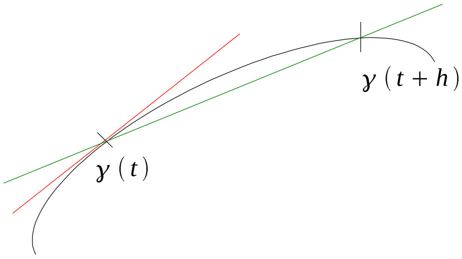
Man kann die Spur jeder ebenen regulären Kurve ohne vertikale Tangente lokal als Graph einer C^1 -Funktion auffassen.

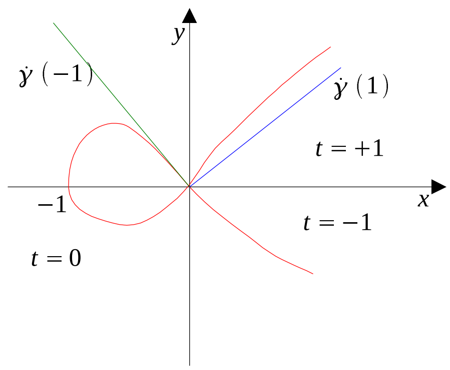
Satz (Spur als Graph): Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, $\gamma(t) = (x(t),\ y(t))^T$. Die Funktion $\dot{x}$ habe auf I keine Nullstelle. Dann gibt es eine stetig diffbare Funktion f auf $J := x(I)$, deren Graph die Spur von γ ist. Die Ableitung von f an der Stelle $x_0 \in J$ mit $x_0(t_0)$ ist
$$f'(x_0) = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)} \ (1)$$

Ist γ 2-mal diffbar, dann ist es auch f und es gilt

$$f''(x_0) = \frac{\dot{x}\ \ddot{y} - \ddot{x}\ \dot{y}}{\dot{x}^3} \quad (2)$$

Merkregel für (1): $\frac{\mathrm{d}\ y}{\mathrm{d}\ x} = \frac{\frac{\mathrm{d}\ y}{\mathrm{d}\ t}}{\frac{\mathrm{d}\ x}{\mathrm{d}\ t}}$;





Beweis: $\dot{x}$ keine Nullstelle auf I, daher wegen Stetigkeit einheitliches Vorzeichen. $\Rightarrow$ x in I streng monoton und stetig diffbare Umkehrfunktion

$\tau : x(J) \to I$

$x(t)$

$\tau(x) \to t$

Für $t \in I$ gilt

$\gamma(t) = (x(t), y(t))^T = (x(t), y \circ \tau(x(t)))^T$
$= (x(t), f(x(t)))^T$
wobei $f := y \circ \tau$

Die Ableitungen von f errechnen sich nach Kettenregel und der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen:

$$f'(x_0) = \dot{y}(\tau(x_0))\ \tau'(x_0) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}(t_0);$$

$$f''(x_0) = \ddot{y}(\tau(x_0))\ \tau'^2(x_0) + \dot{y}(\tau(x_0))\ \tau'';$$
$$= \frac{\ddot{x}\ \dot{x} - \dot{y}\ \ddot{x}}{\dot{x}^3}(t_0);$$

$$\tau(x(t)) = t;$$

$$\frac{\mathrm{d}\ \tau}{\mathrm{d}\ x}\frac{\mathrm{d}\ x}{\mathrm{d}\ t} = 1 \Rightarrow \tau' = \frac{1}{\dot{x}};$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\tau\left(x\left(t\right)\right)\right)\dot{x}=1\,;$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,x^2}\left(\tau\right)\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}\,\dot{x}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\tau\right)\ddot{x}=0\,;$$

$$\tau\,''\,\dot{x}^2\ \text{ü}\ \tau\,'\,\ddot{x}=0\,;$$

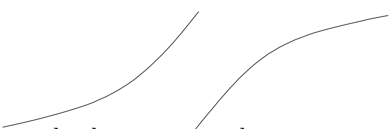
$$\tau\,''\,\dot{x}^2+\frac{\ddot{x}}{\dot{x}}=0\,;$$

$$\tau\,''=-\frac{\ddot{x}}{\dot{x}^3}\,;$$

Beispiel: Kurvendiskussion der Zykloide γ

$x\left(t\right)=t-\sin\,t\,;$

$y\left(t\right)=1-\cos\,t \qquad t\in\mathbb{R}\,;$



$f\left(x\right)=?$

$\dot{x}\left(t\right)=1-\cos\,t$ auf I = (0, $2\,\pi$)

$\Rightarrow$ Es gibt auf x(I) = (0, $2\,\pi$) eine stetig differenzierbare Funktion f, deren Graph der Zykloidenbogen $\gamma\left(\left(0,\,2\,\pi\right)\right)$. f hat keine einfache Darstellung.

$$f'\left(x\right)=\frac{\dot{y}\left(t\right)}{\dot{x}\left(t\right)}=\frac{\sin\,t}{1-\cos\,t}\,;$$

$x\left(t\right)\in\left(\,0,\,2\,\pi\,\right]$ für $t\in\left(\,0,\,\pi\,\right]$ wächst monoton an auf $\left(\,0,\,\pi\,\right]$.

Folgt, daß f auf $\left[\,\pi\,,\,2\,\pi\,\right)$ monoton fällt. Ferner

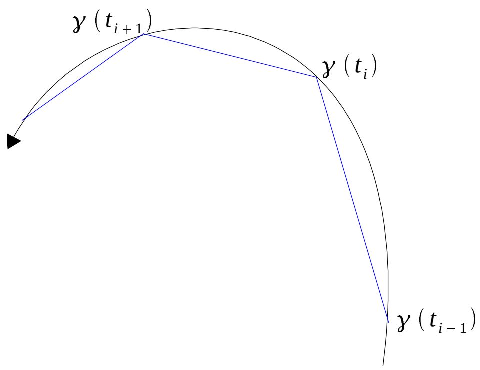
$$f''\left(x\right)=\frac{\ddot{y}\,\dot{x}-\dot{y}\,\ddot{x}}{\dot{x}^3}\left(t\right)=\frac{-1}{\left(1-\cos\,t\right)^2}<0\,;$$

f ist **konkav** $\left(\Leftrightarrow\ f''<0\right.$ konkav / f'' > 0 konvex$\left.\right)$.

> **Definition**: Für $\vec{a}=\left(a_{1,}\,\ldots\,,\,a_n\right)^T\in\mathbb{R}^n$ und $\vec{b}=\left(b_{1,}\,\ldots\,,\,b_n\right)^T\in\mathbb{R}^n$ definieren wir das **Standard-Skalarprodukt** $\in\mathbb{R}$ durch $\vec{a}\,\vec{b}=\left(\vec{a},\,\vec{b}\right):=a_1\,b_1+\ldots+a_n\,b_n$.

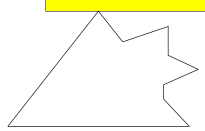
13.2 Bogenlänge

Sei $\gamma:I\rightarrow\mathbb{R}^n$ eine stetige Kurve. Jede endliche Menge Z von Teilungspunkten $t_0\,,\,t_1\,,\,\ldots\,,\,t_m\in I$ mit $t_0<t_1<\ldots<t_m$ definiert ein Sehnenpolygon mit den Ecken $\gamma\left(t_0\right),\,\ldots\,,\,\gamma\left(t_m\right)$ und der Länge $s\left(Z\right)=\sum_{i=1}^{m}\left\|\gamma\left(t_i\right)-\gamma\left(t_{i-1}\right)\right\|$.



Ensteht Z* aus Z durch Hinzunahme weiterer Teilungspunkte, so ist $s(Z^*) \geq s(Z)$.

Definition: Eine stetige Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heißt **rektifizierbar**, wenn die Menge der Längen aller einbeschriebenen Sehnenpolygone beschränkt ist.
Das Supremum dieser Längen heißt gegebenenfalls die **Länge** von γ.
$s(\gamma) := \sup_Z s(Z)$



Satz: Eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit einem kompakten Parameterintervall ist rektifizierbar und hat die Länge

$$s(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \ldots + \dot{x}_n^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

(mit der Abstandsnorm).
Insbesondere hat der Graph einer C¹-Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ die Länge

$$s(\gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x .$$

Bemerkung: *Die Formel für* $s(\gamma)$ *ist plausibel: Bei Deutung von* $\|\dot{\gamma}(t)\|\,\mathrm{d}t$ *ist das in* $\mathrm{d}t$ *zurückgelegte Wegelement* $\mathrm{d}s$*; die Summe der Wegelemente ist der Gesamtweg.*

(Im $\mathbb{R}$ *sind alle Normen äquivalent!)*

Beispiel 1: Länge des Kreisbogens mit Radius r zum Winkel φ:

$\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t) \quad t \in [0, \varphi]$;

$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} = r$;

$s = \int_0^{\varphi} r\,\mathrm{d}t = r\varphi$;

Beispiel 2: Länge des Zykloidenbogens:

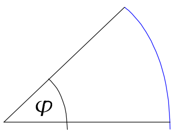
$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t) \quad t \in [0, 2\pi]$;

13.7 Kurven in Polarkoordinaten

(Anmerkung: Kapitelnumerierung kann evtl. nicht mehr mit der im Königsberger übereinstimmen)

Bewegungen eines Punktes in der Ebene können durch Angabe des Polarradius $r(t)$ und Polarwinkels $\varphi(t)$ beschrieben werden, d.h. durch eine Abbildung

$$t \rightarrow (r(t), \varphi(t))^T \qquad t \in I$$

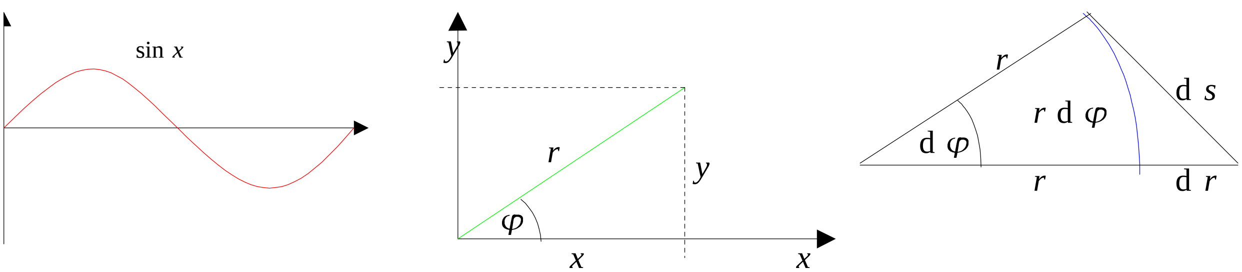


In kartesischen Koordinaten gilt

$$x(t) = r(t) \cos \varphi(t);$$
$$\Rightarrow \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi;$$
$$y(t) = r(t) \sin \varphi(t);$$
$$\Rightarrow \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi;$$
$$\|\dot{y}(t)\|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2;$$

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2} \, \mathrm{d}\, t;$$

Merkfigur:



$$(\mathrm{d}\, s)^2 = r^2 (\mathrm{d}\, \varphi)^2 + (\mathrm{d}\, r)^2;$$
$$\mathrm{d}\, s = \sqrt{r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2} \, \mathrm{d}\, t;$$

Fläche:

$$\mathrm{d}\, F = \frac{1}{2} r^2 \, \mathrm{d}\, \varphi;$$

$$\Rightarrow F = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2 \dot{\varphi}^2 \, \mathrm{d}\, t;$$

14. Elementar integrierbare Differentialgleichungen

14.1 Lineare Gleichungen (Wachstumsmodelle)

Bei einer zeitabhängigen Population $y(t)$ ist die Änderungsrate $\frac{\dot{y}(t)}{y}(t)$ i.A. eine Funktion der Zeit t und des Bestandes.

$$\frac{\dot{y}(t)}{y}(t) = k(t, y(t))$$

Definition: Kennt man die Funktion k und zu einem Zeitpunkt t_0 den Bestand y_0, und sucht man Funktionen $y: I \to \mathbb{R}$ mit
$\dot{y}(t) = k(t, y(t))\, y(t)$ auf Intervallen um t_0 und mit $y(t_0) = y_0$, so nennt man dieses Problem ein **Anfangswertproblem** (**AWP**, englisch: **Initial Value Problem**).
Man schreibt dafür kurz $\dot{y} = k(t, y) \cdot y,\ y(t_0) = y_0$.

Im einfachsten Fall, $k(t, y) = k \in \mathbb{R}$, hat das AWP

$$\dot{y} = k\ y,\ y(0) = y_0$$

auf $\mathbb{R}$ genau die Lösung $y(t) = y_0\, e^{k\,t}$.

Definition: Unter einer **linearen Differenzialgleichung 1. Ordnung** versteht man Gleichungen der Gestalt
$y' = a(x)\, y + b(x)$ (1)
wobei a, b stetige Funktionen auf einem Intervall I sind.
Ferner heißt
$y' = a(x)\, y$ (1_h)
die zu (1) gehörige **homogene Gleichung**.

Wie im Fall konstanter Koeffizienten. gilt:

Mit einer „partikulären“ Lösung y_0 von (1) erhält man jede weitere Lösung y durch Addition einer Lösung y_h der homogenen Gleichung (1_h):

$$y = y_0 + y_h$$

I. Lösung der homogenen Gleichung: Ist A(x) eine Stammfunktion zu a(x) auf I, so besitzt (1_h) dort genau die Lösungen $y = c\, e^A \quad c \in \mathbb{C}$.

Beweis: y eine Lösung $\Rightarrow\ (y\, e^{-A})' = (y' - a\ y)\, e^{-A} = 0$;

$$\Rightarrow\ y\, e^{-A} = const \Rightarrow\ y = c\, e^A.$$

Umgekehrt: $y = c\, e^A \Rightarrow\ y' = c\ a\ e^A = a\ y$

q.e.d

DG 1. Ordnung

(*) $y' = a(x)\, y + b(x)$

a, b - stetige F. auf einem Intervall $a\,,\, b : I \to \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$

(**) $y' = a(x)\, y$

$y = y_n + y_p$

$y_n = c\, e^A$

A - Stammfunktion von a A' = a

c - eine Konstante

Ansatz: $y_P = u\, e^A$ u?

$(u\, e^A)' = a\, u\, e^A + b$

$u'\, e^A + a\, u\, e^A = a\, u\, e^A + b$

$u' = b\, e^{-A}$ u - Stammfunktion $b\, e^{-A}$

Satz: Sei A - Stammfunktion von a
u - Stammfunktion von $b\, e^{-A}$
$y = (u + c)\, e^A \quad c \in \mathbb{C}$

Folgerung:

$y' = a\, y + b\,;$

$y(x_0) = y_0$ a, b - stetig

Beispiel:

$y' = 2\, x\, y + x\,;$

$a(x) = 2\, x,\, b(x) = x\,;$

$A(x) = x^2\,;$

- $y_n = c\, e^{x^2} \quad c \in \mathbb{C}\,;$
- Stammfunktion zu $x\, e^{-x^2}$ $u = \int x\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}\, x = \frac{-1}{2}\, e^{-x^2}\,;$
- $y_p = u\, e^A = \frac{-1}{2}$
- Gesamtheit aller Lösungen: $y = \frac{-1}{2} + c\, e^{x^2} \qquad c \in \mathbb{C}$

Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

AWP

(2) $y' = g(x) \cdot h(x) \qquad y(x_0) = y_0$

$g \in C^0(I) \qquad g : I \to \mathbb{R}$

$h \in C^0(U) \qquad h : U \to \mathbb{R}$

$(x_{0,}\ y_0) \in I \ x\ U$

$y' = \frac{\mathrm{d}\ y}{\mathrm{d}\ x}$;

$\frac{\mathrm{d}\ y}{h(x)} = g(x)\,\mathrm{d}\ x$

(3) $\int\limits_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}\ \eta}{h(\eta)} = \int\limits_{x_0}^{x} q(\xi)\,\mathrm{d}\ \xi$

Lokaler Existenzsatz:

a) Im Fall $h(y_0) = 0$ ist die konstante Funktion $y(x) \equiv y_0$ eine Lösung von (2)

b) Im Fall $h(y_0) \neq 0$ besitzt das AWP (2) in einem hinreichend kleinem offenen Intervall $J \subset I$ um x_0 eine Lösung. Eine solche Lösung erhält man aus (3) durch Auflösen nach y.

Beweis von b):

Sei $V \subset U$ ein offenes Intervall um y_0 so, dass $h(\eta) \neq 0$ für $\eta \in V$.

Wir definieren die Funktionen

$H : V \to \mathbb{R}$; $H(y) = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}\ \eta}{h(\eta)}$;

$G : I \to \mathbb{R}$; $G(x) = \int\limits_{x_0}^{x} g(\xi)\,\mathrm{d}\ \xi$;

$H' = \frac{1}{h}$ hat auf V einheitliches Vorzeichen. H ist daher streng monoton und besitzt eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion $H^{-1} := H(V) \to V$.

$H(V)$ ist ein offenes Intervall um $H(y_0) = 0$.

Sei dann J ein offenes Intervall in I um x_0 mit $G(J) \subset H(V)$.

Ein solches Intervall J existiert, da

(i) $G(x_0) = 0 \qquad \in H(V)$

(ii)G ist stetig

Auf J definieren wir nun

$y : J \to \mathbb{R} \qquad y(x) := H^{-1}(G(x))$

$y(x)$ erhält man durch Auflösen der Gleichung $H(y) = G(x)$.

Die Funktion y löst in J das AWP (2) wegen

(i) $H(y_0) = 0 = G(x_0)$ gilt $y(x_0) = y_0$

(ii)Aus der Identität $H(y(x)) = G(x)$ folgt durch Differenzieren $h(y(x))^{-1} \cdot y'(x) = g(x)$

Beispiel 1:

$y' = x\, y^2 \qquad y(0) = y_0\,;$

$g(x) = x \qquad h(y) = y^2\,;$

I = U = R $\qquad \dfrac{g}{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

a) Für $y_0 = 0$ hat das AWP die Lösung $y = 0$

b) $y_0 \neq 0$ Auflösen der Gleichung $H(y) = \int\limits_{y_0}^{y} \dfrac{d\,\eta}{\eta^2} = \int\limits_{0}^{x} \xi\, d\,\xi = G(x)\,;$

$$\frac{-1}{y} + \frac{1}{y_0} = \frac{1}{2} x^2\,;$$

$$y(x) = \frac{2}{\dfrac{2}{y_0} - x^2}\,;$$

$y_0 < 0 \qquad x \in \mathbb{R}\,;$

$y_0 > 0 \qquad \left(-\sqrt{\dfrac{2}{y_0}}\,,\, \sqrt{\dfrac{2}{y_0}} \right)$

Beispiel 2:

$y' = a(x)\, y \qquad y(x_0) = y_0$

Lineare homogene Differenzialgleichung 1. Ordnung

a) Für $y_0 = 0$ hat das AWP die Lösung $y = 0$.

b) für $y_0 \neq 0$

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\,\eta}{\eta} = \int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)\, d\,\xi := A(x)$$

$$\ln \frac{y}{y_0} = A(x)$$

$$y(x) = y = e^{A(x)}$$

genau wie früher.

Schematisches Lösungsverfahren

für $y' = g(x)\, h(y)$ $\qquad \begin{matrix} g \in C^0(I) \\ h \in C^0(U) \end{matrix}$:

1. Schritt: Sämtliche Nullstellen $\eta \in U$ von h bestimmen.
$y(x) = \eta$ ist jeweils partikuläre Lösung

2. Schritt: Trennung der Variablen
$\frac{1}{h(y)}\,\mathrm{d}\,y = g(x)\,\mathrm{d}\,x \qquad h(y) \neq 0$

3. Schritt: Jede Seite unbestimmt integrieren
$\tilde{H}(y) := \int \mathrm{d}\,\frac{y}{h(y)} \qquad \tilde{G}(x) := \int g(x)\,\mathrm{d}\,x$

Die allgemeine implizite Lösung $\tilde{H}(y) - \tilde{G}(x) = C \qquad C \in \mathbb{R}$

4. Schritt: AWP $y(x_0) = y_0$

Falls $h(y_0) \neq 0$, $c_0 := \tilde{H}(y_0) - \tilde{G}(x_0)$ berechnen
$\tilde{H}(y) - \tilde{G}(x) = c_0$ wenn möglich nach y lösen. Falls $h(y_0) = 0$, dann ist $y(x) = y_0$ Lösung.

15. Lokale Approximation von Funktionen: Taylorpolynome und -reihen

15.1 Approximation durch Taylorpolynome

In Kapitel 9 lineare Approximation:

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

für eine in a differenzierbare Funktion f.

Dabei ist $L(a) = f(a)$, $L'(a) = f'(a)$,
und für den Fehler $R = f - L$ gilt:

$$\lim_{x \to a} \frac{R(x)}{x-a} = c .$$

Es sei f n-mal differenzierbar in a. Wir suchen ein Polynom T mit:

(1) $T(a) = f(a)$, $T'(a) = f'(a)$, … , $T^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$

Die Koeffizienten $a_0, \dots, a_n$ eines solchen Polynoms eines Grades $\le n$:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k ;$$

$$T^{(k)}(a) = k!\; a_k ;$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \qquad k = 0, \dots, n ;$$

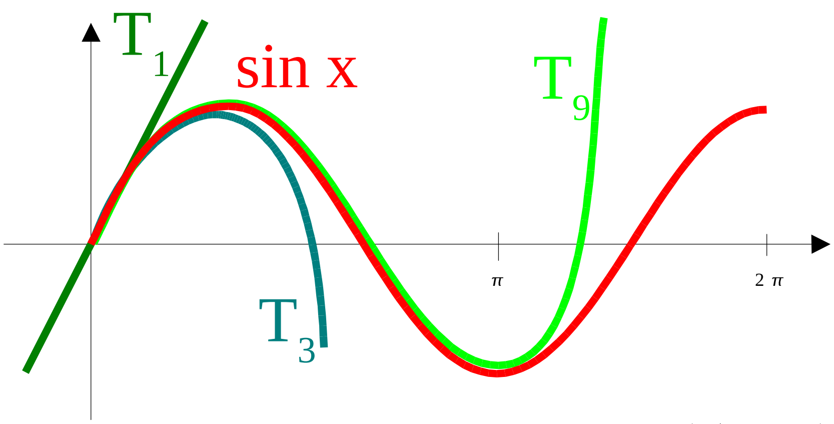
Es gibt also genau ein Polynom T eines Grades $\le n$ mit (1), nämlich:

$$T_n f(x; a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n ;$$

Definition: $T_n f(x; a)$ $T_n f(x)$ heißt **n-tes Taylorpolynom um f im Punkt a**.

Lemma: Hat f in einer Umgebung von a die Darstellung $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$, so ist das n-te Taylorpolynom die n-te Partialsumme $T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$.

Definition: Der Graph von $T_n f$ heißt die **Schmiegparabel n-ten Grades für f an der Stelle a**.



Wichtig ist die Fehlerabschätzung. Wir setzen $R_{n+1}(x) := f(x) - T_n f(x;a)$.

Satz 1: (Integralform für R_{n+1}) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ (n + 1)-mal stetig differenzierbar auf I mit $a \in I$. Dann gilt in $x \in I$:

(2) $R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$.

Beweis: Durch vollständige Induktion.

$n = 0: f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t; \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(a);$

$n-1 \to n$: Nach Induktionsvoraussetzung ist $R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t$.

Partielle Integration: $\int u' v = u v - \int u v' \Rightarrow$

$$f(x) - T_{n-1} f(x) = -\left[\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_a^x + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$f(x) - T_{n-1} f(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots;$$

$$f(x) - T_n f(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x \ldots; \square$$

Folgerung 1 (Lagrange-Form von R_{n+1}): Unter Voraussetzung von Satz 1 $\exists\, \xi \in \mathbb{R}$ mit $a \le \xi \le x : R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ (3).

Beweis: Folgt aus Mittelwertsatz.

Folgerung 2 (qualitative Taylorformel): Ist $f: I \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar, so gibt es auf I eine stetige Funktion r mit

$r(a) = 0$ und

(4) $f(x) = T_n f(x) + (x-a)^n r(x)$.

Beweis: Mit (3) des Restes folgt:

$$R_{n+1}(x) = f(x) - T_n f(x) = R_n(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \overset{(3)}{=} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n;$$

$$r(x) := \frac{1}{(x-a)^n}\left[f(x) - T_n(x)\right] = \frac{1}{n!}\left[f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(a)\right] \text{ für } x \neq a,\ a \leq \xi \leq x.$$

Wegen der Stetigkeit von $f^{(n)}$ folgt direkt:
$\lim_{x \to a} r(x) = 0$. ❑

Landau-Symbol o:

$$f(x) = o(f(x)) \text{ für } x \to a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad (g \neq 0).$$

Dann (4) in der Form:
$$f(x) = T_n f(x) + o\left((x-a)^n\right) \text{ für } x \to a.$$

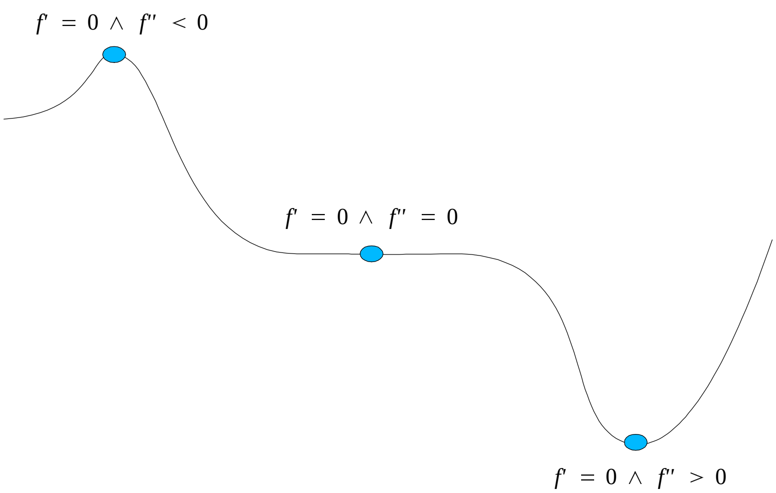
Weiteres Symbol O („von der Ordnung“):
$$f(x) = T_1 f(x) + O\left((x-a)^{n+1}\right) \text{ für } x \to a \text{ meint:}$$
$$f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \to a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Beispiel: Die reelle Funktion f sei (n + 1)-mal stetig differenzierbar in einer Umgebung von a. Ist $f'(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0$, jedoch $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, so hat f in a:

(i) ein lokales Minimum, falls n ungerade und $f^{(n+1)}(a) > 0$

(ii)ein lokales Maximum, falls n ungerade und $f^{(n+1)}(a) < 0$

(iii)kein Extremum, falls n gerade ist:



15.2 Taylorreihen

Definition: Sei die Funktion $f: I \to \mathbb{C}$ unendlich oft differenzierbar. Die Potenzreihe

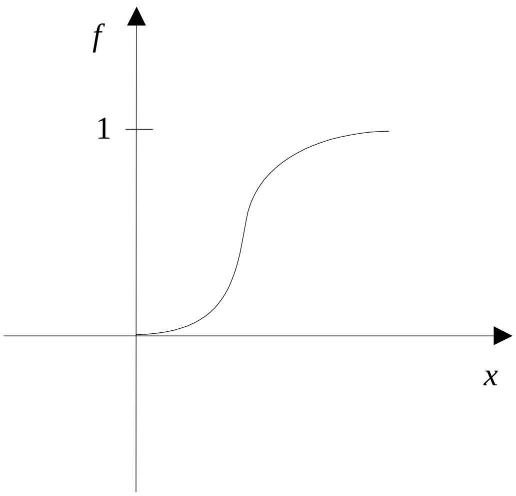
$$T f(x; a) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$ heißt die **Taylorreihe von f** im Punkt $a \in I$.

Konvergiert $T f(x; a)$ gegen $f(x)$ $\forall x \in U_a \subset I$, so sagt man, f besitze in U eine **Taylorentwicklung mit a als Entwicklungspunkt**.

Wird f in U_a durch eine Potenzreihe dargestellt, $f(x) = \sum a_k (x-a)^k$, so ist diese die

Taylorreihe von f in a.
Die Taylorreihe $T\ f\ (x\ ;\ a)$ kann für $x \neq a$ divergieren, und wenn sie konvergiert, muss der Reihenwert nicht notwendig $f\ (x)$ sein.

Beispiel: Gegen $f\ (x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$



f ist unendlich oft differenzierbar und für alle n gilt $f^{(n)}(0) = 0$. Ihre Taylorreihe ist im Nullpunkt daher die Nullreihe und für $x > 0$ ist $T\ f\ (x\ ;\ 0) \neq f\ (x)$.

Beweis: $f'\ (x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$, … , $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$ für $x > 0$ bzw. $f'\ (x)$, … , $f^{(n)} = 0$ für $x \leq 0$ Es gilt aber:

$$\lim_{y \to \infty} \frac{y^n}{e^y} = 0 \left| y = \frac{1}{x} \right| \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n} = 0 \Rightarrow f^{(n)}(x) \underset{x \to 0}{\to} 0 .$$

Taylorreihe um $x = 1$:

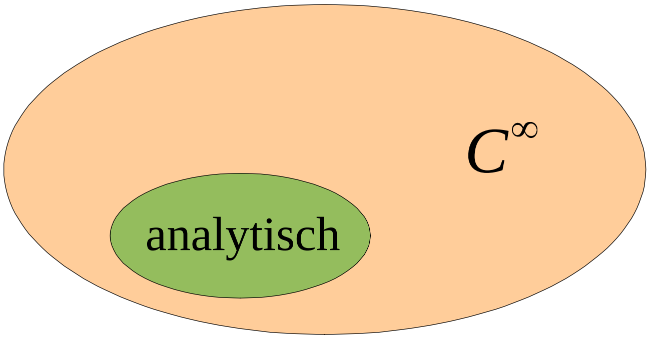
$$T\ (x\ ;\ 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k\ !\ e} = \frac{1}{e^2} \neq 0\ !$$

Definition: Eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ auf einem Intervall I heißt **analytisch** im Punkt $a \in I$, wenn es eine Potenzreihe mit einem positiven Konvergenzradius und ein $\delta > 0$ gibt, so dass für $x \in I_\delta(a)$ gilt:

$$f\ (x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\ (x-a)^k .$$

F heißt **analytisch in I**, wenn f in jedem Punkt $a \in I$ analytisch ist.

Bemerkung*: Analytisch $f : I \to \mathbb{C} \Rightarrow f$ ist eine C^∞ -Funktion. Umkehr gilt nicht!*



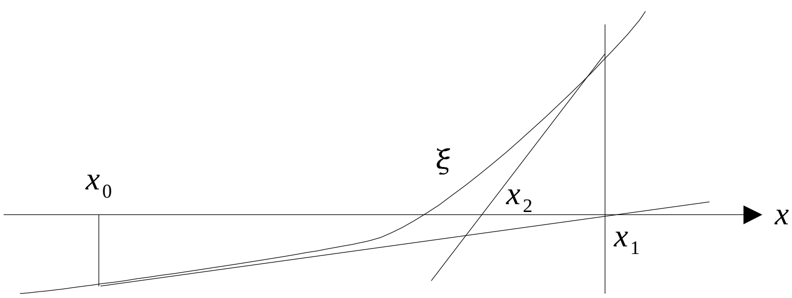
15.4 Anwendung: Das Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung

Gesucht sei eine Nullstelle der Funktion $f(x)$, die in I differenzierbar sei. Sei ξ eine Nullstelle und nehmen wir an, wir kennen einen Näherungswert x_0. Zur Verbesserung des Näherungswertes x_0 verwenden wir die Linearisierung: $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

L ist eine Näherung für f in einer Umgebung von x_0. Die Bedingung $L(x) = 0$ liefert einen (besseren) Schätzwert für die Nullstelle $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ sofern $f'(x_0) \neq 0$.

Liegt x_1 im Definitionsbereich I von f und ist $f'(x_1) \neq 0$, so kann man daraus einen neuen Näherungswert x_2 berechnen:
$x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ usw.

Entsprechend betrachten wir die **Newton-Iteration** (*) $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ $\quad k = 0, 1, 2, \ldots$



Konvergenzsatz: Sei f eine zweimal stetig differenzierbare reelle Funktion. In [a, b] gelte:
(i) f hat in [a, b] eine Nullstelle ξ
(ii) $f'(x) \neq 0$ für $x \in [a, b]$
(iii) f ist in [a, b] konvex oder konkav, d.h. $f''(x) \geq 0$ oder $f''(x) \leq 0$
(iv) die Iterationsreihe x_1 zu $x_0 = a$ und zu $x_0 = b$ liegen in [a, b].

Dann gilt: Bei beliebigem Startwert $x_0 \in [a, b]$ liegt die gemäß (*) gebildete Folge $x_1, x_2, \ldots$ in [a, b] und konvergiert gegen ξ.

Beweis: Königsberger.

Definition: Sei $f : [a, b] \to$ stetig und in (a, b) 2-mal differenzierbar. Dann heißt f **konvex**, wenn $f'' \geq 0$ und **konkav**, wenn $f'' \leq 0$. F ist **streng konvex** (**konkav**), wenn das „=“ ausgeschlossen ist.

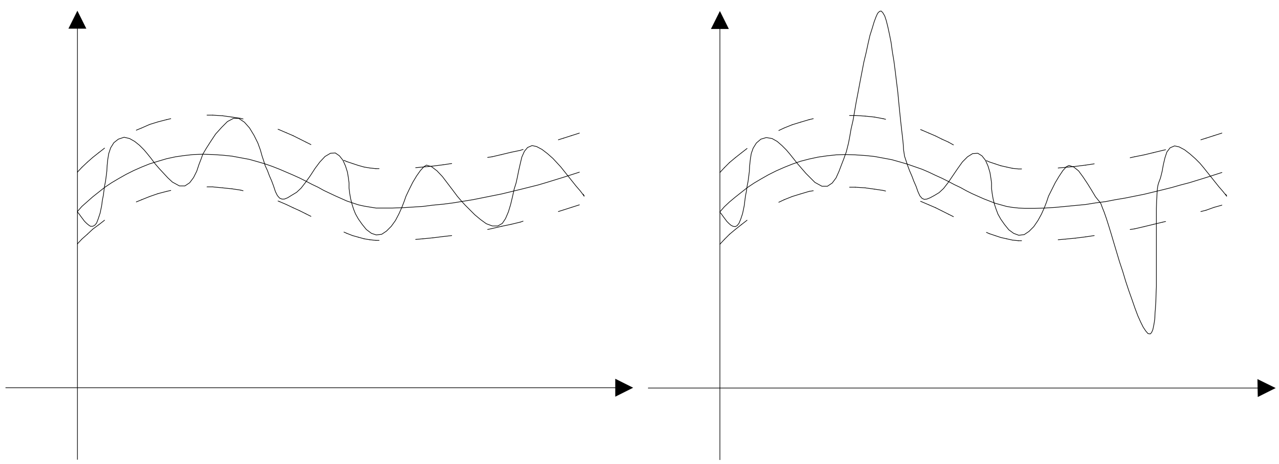
16. Globale Approximation von Funktionen: Gleichmäßige Konvergenz

16.1 Gleichmäßige Konvergenz

Haben in Kap. 7 Funktionenfolgen betrachtet, $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \dots$, und punktweise Konvergenz eingeführt. Die Folge (f_n) heißt auf D punktweise konvergent, wenn $\forall\ x \in D$ die Zahlenfolge $\left(f_n(x)\right)$ konvergiert. Durch $f(x) := \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ ist dann die Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{C}$ definiert. Die Konvergenzgeschwindigkeit bzw. die Güte der Approximation von $f(x)$ durch $f_n(x)$ ist aber von Punkt zu Punkt verschieden.

Definition: Eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ heißt **gleichmäßig konvergent** auf D gegen die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, wenn es $\forall\ \varepsilon > 0$ einen für alle $x \in D$ gemeinsamen Index N gibt, so dass $\left\|f_n - f\right\|_D < \varepsilon \quad \forall\ n > N$, d.h. $\left\|f_n - f\right\|_D \overset{\text{Supremumsnorm}}{\longrightarrow} 0$ für $n \to \infty$.

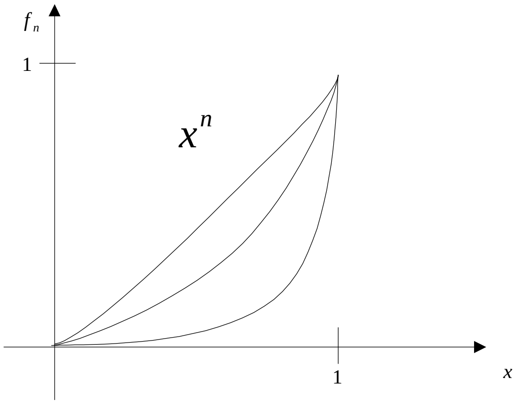
Anschaulich: Für $n \geq N$ liegen alle Graphen $y = f_n(x)$ im ε-Schlauch um $y = f(x)$.



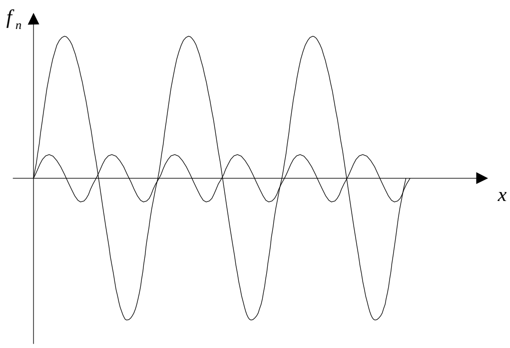
***Bemerkung**: Statt $\left\|f_n - f\right\|_D < \varepsilon$ kann man auch schreiben: $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon \quad \forall\ x \in D$.*

Gegenbeispiele:

1) $f_n(x) = x^n$. Alle f_n stetig, aber $f = \lim\limits_n f_n$ auf [0, 1] unstetig; $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$.



2) $f_n(x) := \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$



Es gilt: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0$. (f_n) konvergiert gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen 0.

$f_n'(x) = \sqrt{n} \cos nx$; $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \infty$ konvergiert nicht!

$f'(x) = 0 \quad \neq \quad \lim_{n\to\infty} f > n'(x)$

16.2 Eigenschaften der Grenzfunktion

Zitieren hier einige Eigenschaften:

Satz 1: Die Grenzfunktion f einer auf $D \subset \mathbb{C}$ gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ ist stetig auf D.

Satz 2: Die Grenzfunktion f einer auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergenten Folge von Regelfunktionen $f_n : [a, b] \to \mathbb{C}$ ist selbst eine Regelfunktion und es gilt:
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x .$$

***Bemerkung**: Der Beweis folgt aus der Tatsache, dass Regelfunktionen so definiert sind, dass es Folgen von Treppenfunktionen (φ_n) gibt, die gleichmäßig gegen f konvergieren (Kapitel 12.2).*

Satz 3: Seien $f_n : I \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ stetig differenzierbare Funktionen auf I:

1. (f_n) konvergiere punktweise auf I
2. (f_n') konvergiere gleichmäßig auf I

Dann ist die Grenzfunktion $f = \lim_{n \to \infty} f_n$ stetig differenzierbar, und $\forall\ x \in I$ gilt: $f'(x) = \lim_{n \to \infty} f'_n(x)$, $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$.

16.3 Kriterium für gleichmäßige Konvergenz

Cauchy-Kriterium: Eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ konvergiert genau dann gleichmäßig auf D, wenn es $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ N : \|f_n - f_m\| \le \varepsilon \quad \forall\ n, m \ge N$ (*).

***Bemerkung**: In Kapitel 5.6 ähnliches Kriterium für Zahlenfolgen und in Kapitel 7.8 für den Grenzwert einer festen Funktion f(x) kennengelernt. Hier betrachten wir Funktionenfolgen. Für Funktionenreihen haben wir in Kapitel 7.3 die Normalkonvergenz diskutiert.*

Beweis:

1) (f_n) konvergiere gleichmäßig gegen f. $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ N : \|f_n - f\| \le \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \ge N$. Für $n, m \ge N$ folgt: $\|f_n - f_m\| \le \|f_n - f\| + \|f - f_m\| \le \varepsilon$.

2) Es sei (*) erfüllt. Aus $|f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon \quad \forall\ x \in D \quad \wedge \quad \forall\ n, m \ge N$ folgt zunächst, dass $(f_n(x))$ eine Cauchy-Zahlenfolge ist. Bezeichnet $f(x)$ ihren Grenzwert, so folgt mit $m \to \infty$: $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon \quad \forall\ x \in D \wedge \forall\ n \in \mathbb{N}$. ❑

Korollar: Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ von Funktionen $f_k : D \to \mathbb{C}$ konvergiert genau dann gleichmäßig auf D, wenn $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ N = N(\varepsilon) : \forall\ m \ge n \ge N \quad \left\| \sum_{n}^{m} f_k \right\| < \varepsilon$.

Beweis: durch Anwendung des Cauchy-Kriteriums auf die Folge $F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$.

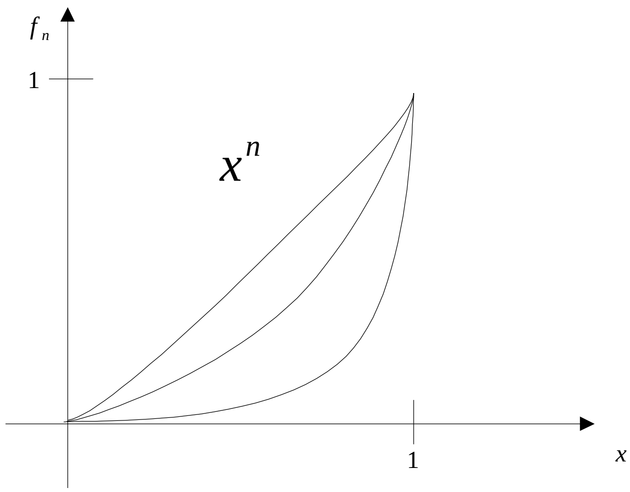
Folgerung (Majorantenkriterium): Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_D$ der Normen bezüglich D konvergiert, dann konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ gleichmäßig auf D. Oder: Jede auf D normal konvergente Reihe ist dort gleichmäßig konvergent.

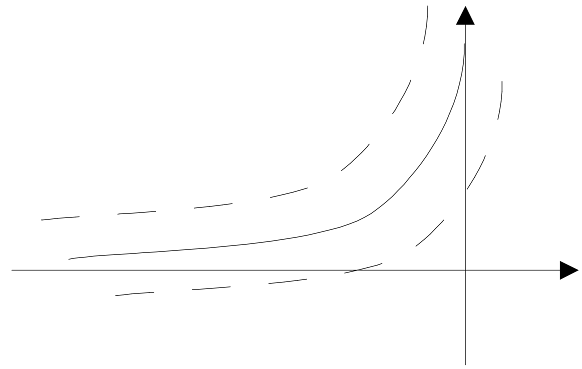
Beweis: Korollar und $\left\| \sum_{n}^{m} f_k \right\| \le \sum_{n}^{m} \|f_k\|$.

***Bemerkung**: Die Normalkonvergenz einer Funktionenreihe ist eine stärkere Bedingung als die gleichmäßige Konvergenz.*

16.4/16.5 Lokal-gleichmäßige Konvergenz

Die Potenzfolge x^n konvergiert zwar nicht im offenen Intervall (-1, 1) gleichmäßig gegen 0, jedoch in jedem kompakten Teilintervall $[-r, r]$ mit $r < 1$.





Definition: Eine Folge $f_n : D \to \mathbb{C}$ konvergiert **lokal-gleichmäßig**, wenn eine Umgebung U_x relativ D existiert, so dass die Folge der $f_n|U_x$ gleichmäßig konvergiert.

Offenbar gelten Sätze 1-3 auch dann, wenn die gleichmäßige Konvergenz durch die lokal-gleichmäßige ersetzt wird.

Konvergiert eine Funktionenfolge $f_n : D \to \mathbb{C}$ in den endlich vielen Teilmengen $U_1, \ldots, U_s \subset D$ gleichmäßig, dann auch in der Vereinigung $U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_s$ (zu $\varepsilon > 0$ wähle man $N(\varepsilon)$ als das Maximum der jeweiligen $N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), \ldots, N_s(\varepsilon)$). Wir zeigen jetzt, dass durch Bildung endlicher Vereinigungen von der gleichmäßigen Konvergenz „im Kleinen“ auf die gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Mengen geschlossen werden kann.

Lokal-Kompakt-Prinzip

Definition:

1) unter einer **offenen Überdeckung** einer Menge $A \subset \mathbb{R}$ verstehen wir eine Familie $\{I_k\}_{k \in K}$ offener Intervalle I_k (K sei Indexmenge) derart, dass jeder Punkt von A in mindestens einem I_K liegt:

$$A \subset \bigcup_{k \in K} I_k$$

2) A hat die **Heine-Borel Überdeckungseigenschaft**, wenn aus jeder offenen

Überdeckung $\{I_k\}_{k \in K}$ von A endlich viele Intervall $I_{k1,} \dots , I_{kn}$ so ausgewählt werden können, dass auch sie A überdecken:

$$A \subset \bigcup_{\nu=1}^{n} I_{k\ \nu}$$

Zeigen: kein offenes Intervall besitzt die HB-Überdeckungseigenschaft.

Beweis: $I_n := \left(a + \frac{1}{n}, b\right)$ mit $\frac{1}{n} < b - a$

I_n bildet offene Überdeckung von (a,b) derart, dass (a,b) nicht durch endlich viele Intervalle überdeckt sind.

Überdeckungssatz von Heine-Borel: Für $A \subset \mathbb{R}$ sind gleichwertig:

(i) A ist kompakt
(ii) A hat die Heine-Borel-Überdeckungseigenschaft.

Beweisskizze:

(i) $\Rightarrow$ (ii) wird durch Intervallschachtelung indirekt geführt. Da Grenzwerte von Folgen in kompakten Intervallen immer im Intervall liegen! $\rightarrow$ (ii).

(ii) Man zeigt zunächst, dass A beschränkt. Das folgt daraus, dass endlich viele beschränkte Intervalle (-k, k), $k \in \mathbb{N}$, ganz A überdecken.

Daraus folgt nach Bolzano-Weierstraß die Existenz konvergenter Teilfolgen. Daraus folgt Kompaktheit.

Satz: Eine lokal-gleichmäßig konvergente Funktionenfolge (f_n) auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ konvergiert auf jeder kompakten Teilmenge $A \subset I$ gleichmäßig.

Beweis: Jeder Punkt $x \in A$ liegt in einem offenen Intervall I_x, in dem (f_n) gleichmäßig konvergiert. Da A kompakt, überdecken bereits gewisse endlich viele solche Intervalle $I_{x1,} I_{x2,} \dots , I_{xs}$ die Menge A. (f_n) konvergiert dann gleichmäßig in $I_{x1} \cup \dots \cup I_{xs}$, also erst recht in A.

16.6 Der weierstraßsche Approximationssatz

Eine Funktion, die in eine Potenzreihe entwickelbar ist, kann auf jeder kompakten Teilmenge des Konvergenzintervalls beliebig genau und gleichmäßig durch Polynome approximiert werden, nämlich einfach durch die Partialsummen.

Definition: Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt. Wir bezeichnen mit $\bar{P} = \overline{P(K)}$ die Mange der stetigen Funktionen $f\colon K \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ Polynom p mit $\|f - p\|_K < \varepsilon$

(d.h. $\bar{P}$ ist die Menge der stetigen Funktionen, die durch ein Polynom beliebig genau approximierbar sind).

Für $\bar{P}$ kann man leicht folgende Eigenschaften beweisen:

Hilfssatz 1: Mit f und g gehören auch $f + g \in \bar{P}$.

Hilfssatz 2: Mit $f,g \in \bar{P} \Rightarrow |f|$, $\max(f, g)$, $\min(f,g) \in \bar{P}$.

Hilfssatz 3: $\forall\ f : K \to \mathbb{R}$ stetig $\wedge \forall\ x \in K \wedge \forall\ \epsilon > 0\ \exists$ Funktion $q \in \bar{P}$ mit:

(i) q(x) = f(x)

(ii) $q \leq f + \epsilon$ auf ganz K

Beweis: Wir wählen zu $\forall\ z \in K$ eine reelle lineare Funktion l_z mit

$l_z(x) = f(x)$ und $l_z(z) = f(z)$

Aus Stetigkeitsgründen, gibt es um z ein offenes Intervall I_z, sodass für $y \in I_z \cap K$ gilt:

$l_z(y) \leq f(y) + \varepsilon$

Nach Heine-Borel überdecken bereits gewisse endlich viele $I_{z1,} \ldots, I_{zn}$ das Kompaktum K. Wir setzen nun $q := \min(l_{z1,} \ldots, l_{zn})$.

q gehört nach Hilfssatz 2 zu $\bar{P}$ und erfüllt offenbar (i). Die Eigenschaft (ii) folgt aus $l_z(y) \leq f(y) + \varepsilon$, da jeder Punkt $y \in K$ in mindestens einem der Intervalle $I_{z1,} \ldots, I_{zn}$ liegt.

Approximationssatz: Zu jeder stetigen Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ auf einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}$ und $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ Polynom P mit $|f(x) - p(x)| < \varepsilon \quad \forall\ x \in K$.

Beweisskizze: Ergänzen Hilfssatz 3 durch eine Funktion q für die gilt $q_x(y) \geq f(y) - \epsilon\ \forall\ y \in U_x \cap K$ und für jedes gewählte $x \in K$. Man wählt dann das Maximum aller q_{xi} aus den endlich vielen Intervallen U_{xi}, die K überdecken und hat damit eine Eingrenzung von f nach oben und unten.

17. Approximation periodischer Funktionen: Fourierreihen

17.1 Der Weierstraßsche Approximationssatz für periodische Funktionen

Definition: Ein **trigonometrisches Polynom** mit Grad $\leq n$ ist eine mit komplexen Koeffizienten c_k gebildetet Funktion.

$$T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \; x \in \mathbb{R}, \; c_k \in \mathbb{C}$$

Summen und Produkte trigonometrischer Polynome sind offenbar wieder trigonometrische Polynome. Mittels $e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$ kann T auch in der reellen Form: $T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ gebracht werden. (wobei i.A. $a_k, b_k \in \mathbb{C}$):

(1)

$$a_0 = 2c_0 \qquad c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$a_k = c_k + c_{-k} \qquad c_k = \frac{1}{2}(a_k - i b_k)$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) \qquad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + i b_k)$$

Beweis: Übung

Bemerkung: $c_k = c_{-k}^*$

$$a_k = c_k + c_k^* = 2 \operatorname{Re} c_k$$

$$b_k = i(c_k - c_k^*) \, i(2i \operatorname{Im} c_k)$$

Die Koeffizienten c_k und damit $a_{k,} b_k$ sind durch T eindeutig bestimmt, wegen der sogenannten **Orthogonalitätsrelation**.

(2) $\int_0^{2\pi} e^{inx} \cdot e^{-imx} \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{falls } n \neq m \end{cases} \qquad n, m \in \mathbb{Z}$

ist nämlich $\left(e^{i 2\pi k} = 1 \qquad k \in \mathbb{Z}\right)$

(3) $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x$

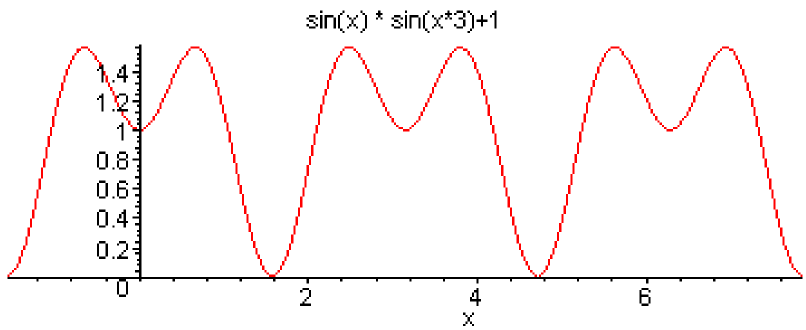
Notation: Kronecker-Symbol: $\int_0^{2\pi} e^{inx - imx} \, \mathrm{d}x = 2\pi \delta_{nm}$

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Definition: Wir bezeichnen $\bar{T}$ die Menge der 2π -periodischen, stetigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft:
$\forall\, \epsilon > 0\ \exists$ reelles trigonometrisches Polynom T mit $|f(x) - T(x)| \le \varepsilon \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

[Dies ist analog zu $\bar{P}$ in 16.6]

$T = \frac{2\pi}{\omega}$; $x := \omega \cdot T$; periodische Funktion: $f(x) = f(x + 2\pi)$; (bzw. man kann auch oft nichtperiodische Funktionen in einem bestimmten Intervall als periodisch betrachten)



$f(x) = \sin(x) \cdot \sin(3 \cdot x) + 1$;

$f(x)$ lässt sich durch Superposition unendlich vieler harmonischer Schwingungsprozesse darstellen.

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos k x + b_k \sin k x) ;$$

komplexe Schreibweise: $\cos k x = \frac{1}{2}\left(e^{i k x} + e^{-i k x}\right)$; $\sin k x = \frac{1}{2 i}\left(e^{i k x} - e^{-i k x}\right)$;

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left[a_k \frac{1}{2}\left(e^{i k x} + e^{-i k x}\right) + b_k \frac{1}{2 i}\left(e^{i k x} - e^{-i k x}\right) \right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=-N}^{N} c_k\, e^{i k x} ;$$

$c_{\pm k} = \frac{1}{2}\left(a_k \mp i\, b_k\right)$; $k > 0$;

$c_0 = \frac{a_0}{2}$;

Umkehrung: $a_k = c_k + c_{-k}$; $b_k = i\,(c_k - c_{-k})$;

Trigonometrisches Polynom: $T(x) := \sum_{k=-N}^{N} c_k\, e^{i k x} \quad x \in \mathbb{R}$, $c_k \in \mathbb{C}$;

Die c_k und damit die a_k und b_k sind durch T(x) **eindeutig bestimmt** wegen **Orthogonalitätsrelationen** $\int_0^{2\pi} d\,x\, e^{i n x} \cdot e^{-i m x} = \int_0^{2\pi} d\,x\, e^{i (n-m) x} = \frac{1}{i\,(n-m)}\, e^{i (n-m) x} \Big|_0^{2\pi}$.

$$\int_0^{2\pi} d\,x\; e^{i\,n\,x}\cdot e^{-i\,m\,x} = \begin{cases} 2\,\pi & \text{falls } n=m \\ 0 & \text{falls } n\neq m \end{cases} =:2\,\pi\;\delta_{nm}\,;\quad \delta_{nm}=\begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n\neq m \end{cases};$$

$$c_k = \frac{1}{2\,\pi}\int d\,x\;T\,(x)\,e^{-i\,k\,x} = \frac{1}{2\,\pi}\int d\,x\left(\sum_{l=-N}^{N} c_l\;e^{i\,l\,x}\right)e^{-i\,k\,x} \stackrel{!}{=} \sum_l c_l\;\delta_{kl} = c_k\,;$$

$$\Rightarrow\; a_k = \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\pi} d\,x\;T\,(x)\,\underbrace{\left(e^{-i\,k\,x}+e^{i\,k\,x}\right)}_{2\cos k\,x}\,;\text{ analog } b_k\,;$$

$$\Rightarrow\; a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\,x\;T\,(x)\cos k\,x\,;\quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\,x\;T\,(x)\sin k\,x\,;$$

Approximationssatz: Jede stetige Funktion $f\,(x)$ in $[-\pi\,;+\pi]$ mit $f\,(-\pi)=f\,(\pi)$ lässt sich mit beliebiger Genauigkeit durch trigonometrische Polynome approximieren.

Beweis: mit Satz von Leopold Fejér (Königsberger S. 336)

Betrachte die Teilsummen $S_n\,f := \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos k\,x + b_k\sin k\,x\right)$, setze die a_k und b_k ein.

$$\Rightarrow\; S_n\,f = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\,y\;f\,(y)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\,x\cos k\,y + \sin k\,x\sin k\,y\right);$$

$$S_n\,f = \frac{1}{\pi}\int d\,y\;f\,(y)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1} n\cos k\,(x-y)\right);$$

$$S_n\,f =: \int_{-\pi}^{\pi} d\,y\;D_n\,(x-y)\cdot f\,(y)\,;\quad D_n : \textbf{Dirichlet-Kern},\quad D_n\,(s) = \frac{1}{2\,\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{i\,k\,s}\,;$$

$$D_n\,(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\,\pi}\,(2\,n+1) & \text{falls } e^{i\,s}=1 \\[2ex] \dfrac{1}{2\,\pi}\,\dfrac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)}{\sin\dfrac{1}{2}\,s} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$S_n\,f = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\,y\;f\,(y)\,;\quad f\,(y) = \frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)(x-y)}{\sin\dfrac{1}{2}\,(x-y)}\,;$$

Fejér-Summierung: Bilde das arithmetische Mittel der Fourier-Polynome:

$$\sigma_{n-1}\,f = \frac{1}{n}\left(S_0\,f+S_1\,f+\ldots+S_{n-1}\,f\right) = \frac{1}{2\,\pi\,n}\int_{-\pi}^{\pi} d\,y\;f\,(y)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\left[\left(k+\dfrac{1}{2}\right)(x-y)\right]}{\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)}\,;$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right) u = \frac{\sin^2\left(n\,\frac{u}{2}\right)}{\sin\frac{u}{2}};$$

Annahme: $f(x)$ ist eine Regelfunktion $\Rightarrow$ $f(x)$ hat als Unstetigkeiten höchstens endliche Sprünge

Betrachte kurz $f(x)=1 \Rightarrow a_0=2;\ a_\nu=b_\nu=0;\ \nu\neq 0;$

$$\sigma_n\left[f(x)-1\right]=1=\frac{1}{2\,n\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\,y\,\frac{\sin^2\left(n\,\frac{x-y}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right)} \text{ (*)};$$

Multipliziere (*) mit $\frac{1}{2}\left[f(x^+)+f(x^-)\right]$ und subtrahiere von $\sigma_{n-1}\,f$:

$$\sigma_{n-1}\,f-\frac{\left[f(x^+)+f(x^-)\right]}{2}=\frac{1}{2\,n\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\,y\left[f(y)-\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\right]\frac{\sin^2\left(n\,\frac{x-y}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right)};$$

$$\sigma_{n-1}\,f-\frac{\left[f(x^+)+f(x^-)\right]}{2}=\frac{1}{n\,\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\,u\,\varphi(u)\,\frac{\sin^2(n\,u)}{\sin^2 u};$$

$\varphi(u):=f(x-2\,u)+f(x+2\,u)-f(x^+)-f(x^-);$

$\varphi(u\to 0^+)=\varphi(u\to 0^-)=0;\ \varphi(u)=\varphi(-u)$ gerade Funktion

$|\varphi(u)|<\varepsilon;\ \varepsilon$ beliebig;

wenn nur $|u|<\eta<\frac{\pi}{2}$:

$$\left|\frac{1}{n\,\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\,u\,\varphi(u)\,\frac{\sin^2 n\,u}{\sin^2 u}\right|\leq\frac{1}{n\,\pi}\int_0^{\eta}\mathrm{d}\,u\,|\varphi(u)|\,\frac{\sin^2 n\,u}{\sin^2 u}+\frac{1}{n\,\pi}\int_{\eta}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\,u\,|\varphi(u)|\,\frac{\sin^2 n\,u}{\sin^2 u};$$

$$\left|\sigma_{n-1}\,f-\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\right|<\varepsilon;$$

Satz von Fejér und Dirichlet: Jede stetige Funktion $f(x)$ in $[-\pi;\pi]$ und $f(-\pi)=f(\pi)$ lässt sich eindeutig und mit beliebiger Genauigkeit durch trigonometrische Polynome approximieren.
An eventuellen Sprungstellen konvergiert die Polynomapproximation gegen $\frac{1}{2}\left[f(x^+)+f(x^-)\right]$.

Approximationssatz: Zu jeder stetigen Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ mit der Periode $2\,\pi$ gibt es ein trigonometrisches Polynom T mit $|f(x)-T(x)|\leq\varepsilon \quad \forall\ x\in\mathbb{R}$.

Beweis: Folgt mit $\bar{P}\to\bar{T}$ aus dem weierstraßschen Approximationssatz.

Bemerkung*: Reiner Existenzsatz.*

17.2 Definition der Fourierreihen. Der Identitätssatz

Definition: $R(T) =$ Vektoren der 2π-periodischen komplexwertigen Regelfunktionen auf $\mathbb{R}$.

Definition: In Verallgemeinerung von (3) $c_k = \int_0^{2\pi} T(x)\, e^{-ikx}\, \mathrm{d}x$ definiert man als den **k-ten Fourierkoeffizienten einer Funktion** $f \in R(T)$ die Zahl
$\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, \mathrm{d}x \quad k \in \mathbb{Z},\ \hat{f}(k) \in \mathbb{C}$.

Das mit diesen Fourierkoeffizienten gebildete trigonometrische Polynom $S_n f(x) := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\, e^{ikx}$ heißt **n-tes Fourierpolynom** der Funktion f.

Schließlich versteht man unter der **Fourierreihe** $S_\infty f$
$S_\infty := \lim_{n\to\infty} S_N f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\, e^{ikx}$, sofern der Grenzwert existiert.

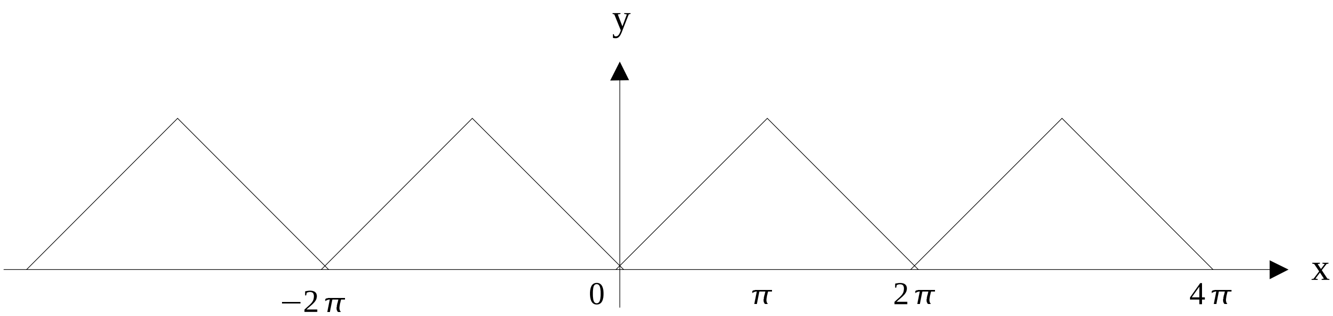
Bemerkung: *Das Symbol* $\sum_{-\infty}^{\infty}$ *bedeutet stets* $\lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n}$.

Bemerkung: *Die Reihen* $\sum_0^{\infty}$, $\sum_{-\infty}^{-1}$ *müssen* ***nicht*** *konvergieren, auch wenn* $S_\infty f$ *existiert.*

Das n-te Fourierpolynom $S_n f$ lässt sich auch als Sinus-Cosinus-Reihe darstellen,
$S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)$, wobei gilt:
$a_k = \hat{f}(k) + \hat{f}(-k)$;
$b_k = i\left(\hat{f}(k) - \hat{f}(-k)\right)$;
$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, \mathrm{d}x \quad k = 0, 1, 2, \ldots$;
$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, \mathrm{d}x \quad k = 1, 2, 3, \ldots$; (k zählt ab 1, weil sin(0) = 0)

Folgerung:
f ungerade $\Leftrightarrow$ $a_k = 0 \quad \forall k$
f gerade $\Leftrightarrow$ $b_k = 0 \quad \forall k$

Beispiel 1: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := |x|$ für $x \in [-\pi, \pi]$ und $f(x + 2\pi) = f(x)$.



Da f gerade $\Rightarrow$ $b_k = 0$ und $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos k\,x \,\mathrm{d}\,x$;

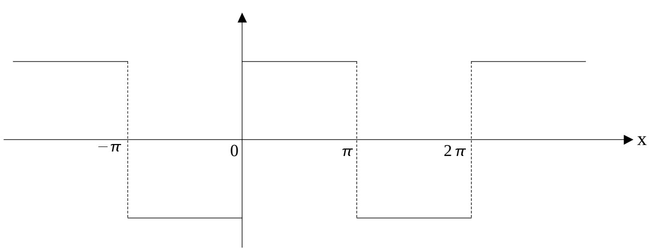
$\Rightarrow a_0 = \pi$, $a_k = -\frac{2}{\pi}\left(1-(-1)^k\right)$ für $k \geq 1$;

$$S_\infty f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right);$$

Majorante ist $\sum \frac{1}{n^2}$ $\Rightarrow$ $S_\infty f$ konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$, stellt eine stetige Funktion dar.

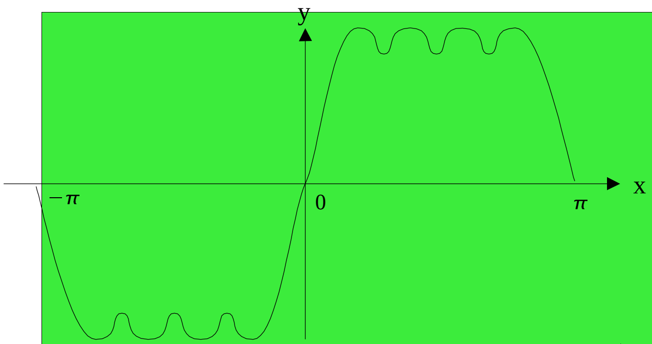
Beispiel 2:

Sei $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, \pi) \\ -1 & x \in (-\pi, 0) \\ 0 & x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.



Da f ungerade $\Rightarrow$ $a_k = 0$ und $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin k\,x\,\mathrm{d}\,x = \begin{cases} \frac{4}{k\,\pi}, & k = 1, 3, 5, \ldots \\ 0 & k = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$

$$\Rightarrow S_n f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin n x}{n}\right).$$



Identitätssatz: Sei f und $g \in R(T)$ stetige Funktionen mit gleichen Fourierkoeffizienten, d.h. $\hat{f}(k) = \hat{g}(k) \quad \forall\ k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad f = g$.

Beweisskizze: Die Fourierkoeffizienten von $h := f - g$ sind nach (V) (= Voraussetzung) null, $\hat{h}(k) = 0$. Mit dem weierstraßschen Approximationssatz zeigt man, dass $\int_0^{2\pi} |h(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 0$

$\Rightarrow \ h = 0 \quad \forall\ x$, da $|h|^2$ stetig und ≥ 0 in $[0, 2\pi]$.

Darstellungssatz: Ist $f \in R(T)$ stetig und konvergiert die Fourierreihe von f gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, so gilt $S_\infty f = f$.

Beweis: Nach (V) definiert $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{l=-n}^{n} \hat{f}(l)\, e^{i l x} = S_\infty f(x) =: g(x)$ eine stetige Funktion (wegen gleichmäßiger Konvergenz).

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \to \infty} \sum_{l=-n}^{n} \hat{f}(l) \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i l x}\, e^{-i k x}\, \mathrm{d}x}_{2\pi\, \delta_{lk}} = \hat{f}(k) \quad \forall\ k$$

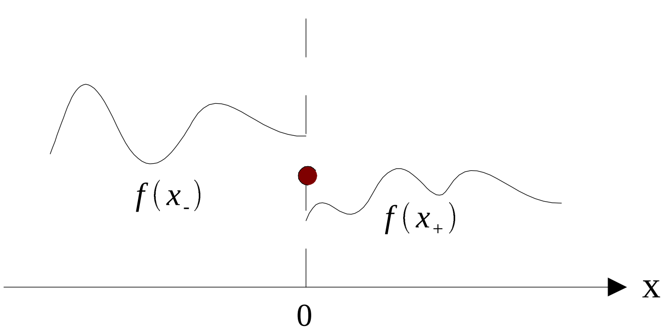
$\Rightarrow$ nach dem Identitätssatz $S_\infty f = f$. q.e.d.

***Bemerkung**: Dieser Satz ist Konsistenzfeststellung, es bleibt offen, ob und wann $S_\infty f$ konvergiert und gegen was.*

17.4 Punktweise Konvergenz nach Dirichlet

Hinreichendes Konvergenzkriterium für Regelfunktionen $f \in R(T)$:

Definition: f sei eine Regelfunktion, sie hat daher in x einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Grenzwert $f(x_-)$ bzw. $f(x_+)$.



Der Grenzwert

$\lim_{t \uparrow x} \frac{f(t) - f(x_-)}{t - x}$ heißt **linksseitige Ableitung**

$\lim_{t \downarrow x} \frac{f(t) - f(x_+)}{t - x}$ heißt **rechtsseitige Ableitung**

in x. Es gilt:

Satz: Die Funktion $f \in R(T)$ besitze in x sowohl eine linksseitige als auch eine rechtsseitige Ableitung. Dann gilt:

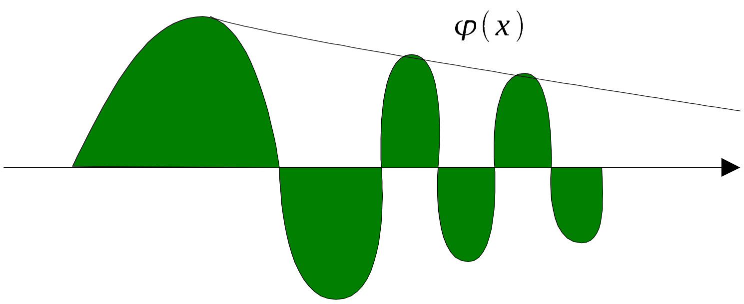
(i) Ist f in x stetig, so konvergiert S_∞ im Punkt x gegen f(x); $S_\infty f = f$;

(ii)Ist f in x unstetig, so konvergiert $S_\infty f$ in x gegen das arithmetische Mittel des linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwertes von f in x.

$$S_\infty f(x) = \frac{1}{2}[f(x_-) + f(x_+)]$$

Riemannsches Lemma: Für jede Regelfunktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ gilt:

$$\lim_{p \to \infty} \int_a^b \varphi(x) \sin p x \, \mathrm{d} x = 0 .$$



Beweis: Königsberger

Der Dirichlet-Kern

Definition: Unter dem **Dirichlet-Kern n-ten Grades** versteht man die Funktion:

(10) $D_n(x) := \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{i k x}$, d.h. $\hat{f}(k) = 1$.

Sofern $x \notin 2\pi \cdot \mathbb{Z}$ ist, ist das eine endliche geometrische Summe.

$$D_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2} x\right)}{\sin \frac{x}{2}} & x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ \frac{1}{2\pi}(2n+1) & x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases};$$

Dirichletsches Lemma:

(i) $\forall\ n$ ist $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$

(ii) Für jede in 0 linksseitig und rechtsseitig differenzierbare Regelfunktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ gilt für $n \to \infty$ $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t)\,\mathrm{d}t \to \frac{1}{2}\left[f(0_-) + f(0_+)\right]$.

Bemerkung: *$D_\infty(t)$ ist in der Funktionalanalysis die **Dirac'sche Deltafunktion** $\delta(t)$* $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$.

Beweis:

(i) Folgt aus (10) $D_n(x)$.

(ii) Da D_n eine gerade Funktion ist, können wir aus (i) folgern: $\frac{f(0_+)}{2} = \int_0^{\pi} f(0_+)\, D_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Damit folgt:
$$\int_0^{\pi} f(t)\, D_n(t)\,\mathrm{d}t - \frac{f(0_+)}{2} = \int_0^{\pi} \underbrace{\underbrace{\frac{f(t) - f(0_+)}{t}}_{\lim\limits_{t\to 0} \text{ existiert}} \cdot \underbrace{\frac{t}{2\pi \sin\frac{t}{2}}}_{\lim\limits_{t\to 0} = \frac{1}{\pi}}}_{=:\varphi(t)} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t\,;$$

φ wird mit $\varphi(0) := \lim\limits_{t \downarrow 0} \varphi(t)$ eine Regelfunktion auf $[0, \pi]$.

Das riemannsche Lemma ist also anwendbar und ergibt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} f(t)\, D_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(0_+)}{2}\,;$$

analog: $\int_{-\pi}^{0} f(t)\, D_n(t)\,\mathrm{d}t \to \frac{f(0_-)}{2}$;

Einschub:

Orthogonalitätsrelation nennt man Funktionen, die folgende Bedingung erfüllen:

$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, f_m(x)\,\mathrm{d}x = \delta_{nm}$ (allgemein); $\int_0^{2\pi a} e^{in\frac{x}{a}}\, e^{-im\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x = 2\pi a\,\delta_{nm}$ (mit Periodizität);

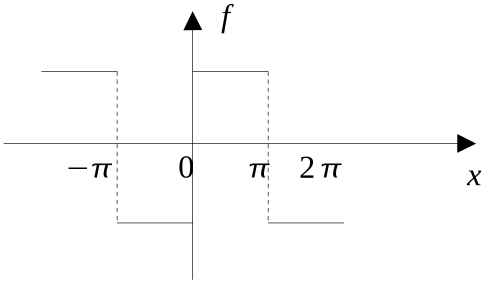
damit kann man den Fourierkoeffizienten aus der Fourierreihe berechnen

---

Beispiel:

Die Fourierreihe konvergiert an allen Stellen $x \in \mathbb{R}$ gegen

$$f(x) = S_\infty f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right).$$



An Stetigkeitsstellen gilt (i). An den Sprungstellen $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, hat die Reihe den Wert 0: $S_\infty f(k\pi) = 0 = \frac{1}{2}\left(f(k\pi_-) + f(k\pi_+)\right)$.

17.5 – 17.6 Fourierreihen stückweise stetig differenzierbarer Funktionen

Definition: Eine Funktion $f \in R(T)$ heißt **stückweise stetig differenzierbar**, wenn es eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = 2\pi$ des Periodenintervalls $[0, 2\pi]$ gibt, und stetig differenzierbare Funktionen f_k in den abgeschlossenen Teilintervallen $[t_{k-1}, t_k]$ mit den f in den offenen Teilintervallen (t_{k-1}, t_k) übereinstimmt: $f(x) = f_k(x)$ für $x \in (t_{k-1}, t_k)$.

***Bemerkung**: Die Funktion f kann also Sprungstellen haben.*

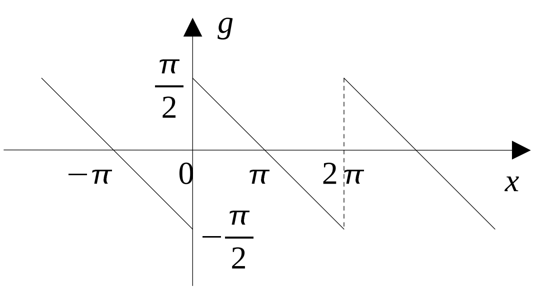
Satz: Die Fourierreihe einer stückweise stetig differenzierbaren Funktion $f \in R(T)$ konvergiert auf jedem Intervall $[a, b]$, das keine Unstetigkeitsstelle von f enthält, gleichmäßig auf f.

Beweis: Königsberger

***Bemerkung**: Die gleichmäßige Konvergenz findet in der Tat an den Unstetigkeitsstellen von f nicht statt. Das ist das sogenannte **gibbsche Phänomen**.*

Beispiel: Sägezahn

$$g(x) = \frac{\pi - x}{2} \qquad x \in (0, 2\pi);\ g(0) = 0;$$



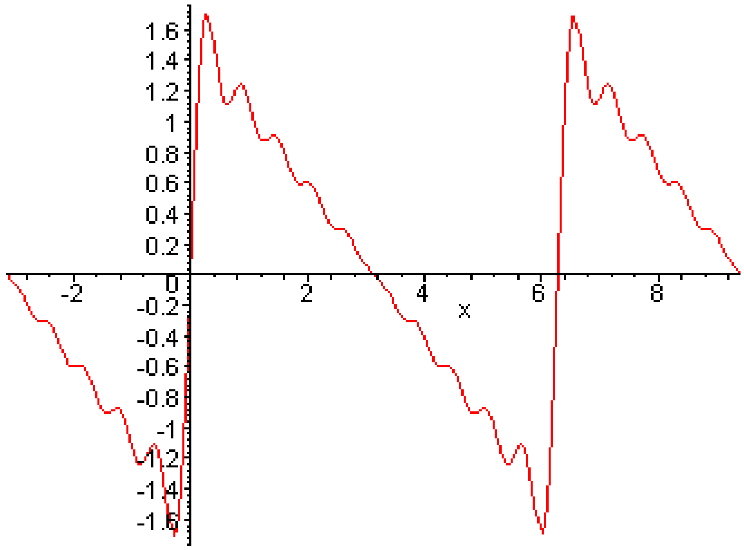
g ungerade $\Rightarrow$ $a_k = 0$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \underbrace{\frac{\pi - x}{2}}_{v} \underbrace{\sin kx}_{u'}\, \mathrm{d}x = \left.\frac{-(\pi - x)\cos kx}{k\pi}\right|_0^\pi - \underbrace{\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \cos kx\, \mathrm{d}x}_{=0} = \frac{1}{k};$$

$\Rightarrow$ Fourierreihe von g:

$$S_\infty g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots;$$

```
plot( sum( 'sin( k * x) / k', 'k' = 1..10), x = -Pi..3*Pi);
```



Man findet nahe der Unstetigkeitsstelle ein Überschwingen von $S_N\, g$, und zwar kann man sagen, dass an $x_n = \dfrac{\pi}{n + \frac{1}{2}} \underset{n \to 0}{\rightarrow} 0$ gilt: $S_n\, g\,(x_n) - g\,(x_n) > 0{,}089\,\pi$ **unabhängig von n**.

Das ist das **Gibbs-Phänomen**.

Deutung: Für eine reelle T-periodische Schwingung f stellen die Fourierkoeffizienten die (komplexen) Amplituden der harmonischen Trägerschwingung dar, aus dem sich f zusammensetzt.

$c_0 = \dfrac{a_0}{2}$: arithmetischer Mittelwert (Gleichspannungsanteil für elektrische Signalspannung)

$2\,c_1 = a_1 - i\,b_1$: komplexe Amplitude der Grundschwingung

$2\,c_n = a_n - i\,b_n$, $n \geq 2$: n-te Oberschwingung

$\sqrt{\dfrac{\sum_{n=2}^{\infty} \left|{c_n}^2\right|}{\sum_{n=1}^{\infty} \left|{c_n}^2\right|}}$: Oberschwingungsanteil (Klirrfaktor)