Ein Skript der Vorlesung

Höhere Mathematik für Physiker 4

Inoffizielle studentische Mitschrift
(unkorrigierte Version – bitte Ende des Semesters neue Version downloaden!)

Dozent:
Prof. Klaus Buchner
TU München
4. Semester, SS 2001

Datum: 20.07.2001

von Michael Wack, Christoph Moder, Manuel Staebel

http://www.skriptweb.de

Hinweise (z.B. auf Fehler) bitte per eMail an uns: mail@skriptweb.de – Vielen Dank.

Inhaltsverzeichnis

6. Fortsetzung von Kapitel 6: Differenzialgleichungen

(2) $y' = A(x)\, y\ ;\ y(x) \in \mathbb{R}^n$

Satz 6.1: y_1, y_2 Lösungen von (2) $\Rightarrow$ $a\, y_1 + b\, y_2$ ist Lösung für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Satz 6.2: Die Elemente der (n, n)-Matrix $A(x)$ seien im Intervall
$G : -\infty \leq x_a < x < x_e \leq \infty$
stetige Funktionen von x $\Rightarrow$

1.) Die Lösungen $y(x)$ von (2) existieren für alle $x \in G$; sie sind stetig differenzierbar und eindeutig.

2.) Ist $(e_1, \ldots, e_n)$ eine beliebige Basis des $\mathbb{R}^n$, so lässt sich die Lösung z mit den Anfangsbedingungen
$$z(x_0) = z_0 = \sum_i z^i\, e_i \qquad (x_0 \in G)$$
durch
$$z(x) = \sum z^i\, y_i(x)$$
gewinnen, wo $y_i(x)$ die Lösungen mit $y_i(x_0) = e_i$ sind.

Definition: Vektoren $y_i(x)$ heißen **Lösungsbasis** (für jedes i eine Spalte)
$Y(x) := \left(y_1(x), \ldots, y_n(x)\right)$ heißt **Fundamentalmatrix** oder **Übergangsmatrix**.

Wähle $(e_1, \ldots, e_n)$ als die natürliche Basis. Dann heißt $Y(x)$ bezüglich dieser Basis die **normierte Lösungsmatrix** bezüglich $x = x_0$.

Satz 6.3: Sind die Lösungsvektoren $z_1(x), \ldots, z_n(x)$ von (2) ($A(x)$ sei stetig in G) in einem $x_0 \in G$ linear unabhängig, so sind sie es für alle $x \in G$.

Bemerkung: *Ist $Y(x)$ eine Fundamentalmatrix, so ist $Y(x) \cdot Y^{-1}(x_0)$ die bezüglich x_0 normierte Übergangsmatrix* $\Rightarrow$
$z(x) = Y(x) \cdot Y^{-1}(x_0)\, z(x_0)$.

Satz 6.4: Sei $Y(x)$ eine Fundamentalmatrix von (2). Eine (n, n)-Matrix B ist genau dann eine Fundamentalmatrix von (2), wenn $B(x) = Y(x) \cdot K$ mit einer nicht-singulären, konstanten (n, n)-Matrix K ist.

Satz 6.5: Die Elemente der (n, n)-Matrix $A(x)$ seien im Intervall $]x_a, x_e[$ mit $-\infty \leq x_a < x_e \leq \infty$ stetige Funktionen von x, ebenso $b(x) \in \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$

1.) Die Lösungen $y(x)$ der DGL $y' = A(x)\, y + b(x)$ existiert für alle $x \in G$; sie sind stetig differenzierbar und eindeutig.

2.) Ist $Y(x)$ eine Fundamentalmatrix der homogenen DGL $y' = A(x)\,y$, dann lässt sich die Lösung z der inhomogenen DGL mit der Anfangsbedingung $z(x_0) = z_0$ in der Form

(5) $$z(x) = Y(x)\,Y^{-1}(x_0)\,z_0 + Y(x)\int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)\,b(t)\,\mathrm{d}t$$

angeben.

Beweis:

1.) wird ebenso bewiesen wie 1.) von Satz 6.2: Existenzaussage: unmittelbare Folge von 2.5. Eindeutigkeit wurde bereits in 6.2a bewiesen.

2.) Sei z die Lösung mit $z(x_0) = z_0$. Definiere
$u := Y^{-1}(x)\,z(x)$; $\Rightarrow z' = Y'\,u + Y\,u' = A\,Y\,u + Y\,u'$.
Außerdem gilt: $z' = A\,z + b = A\,Y \cdot u + b$. Vergleich $\Rightarrow Y\,u' = b \Rightarrow$

$$u = u_0 + \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)\,b(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Dabei ist u_0 ein konstanter Vektor

$$z(x) = Y(x)\,u(x) = Y(x)\,u_0 + Y(x)\int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)\,b(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

u_0 ist so zu wählen, dass $z(x)$ die Anfangsbedingung $z(x_0) = z_0$ erfüllt $\Rightarrow u_0 = Y^{-1}(x_0) \cdot z_0$.

Definition: Die Menge der Lösungen einer DGL zu beliebigen Anfangswerten heißt **allgemeine Lösung**.

Satz 6.6: Die allgemeine Lösung y der inhomogenen DGL $y' = A(x)\,y + b(x)$ ist die Summe einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung der homogenen DGL $u' = A(x)\,u$.

Beweis:

1.) Sei y eine spezielle Lösung von $y' = A\,y + b$ und u Lösung von $u' = A\,u$ $\Rightarrow$
$(y + u)' = y' + u' = A\,y + b + A\,u = A(y + u) + b$,
d.h. $y + u$ ist Lösung des inhomogenen Systems.

2.) Z.z.: Alle Lösungen z des inhomogenen Systems lassen sich als $z = y + u$ schreiben.
$u' = (z - y)' = z' - y' = A\,z + b - A\,y - b = A(z - y) = A\,u$,
d.h. $u := z - y$ eine Lösung des homogenen Systems.

Beispiel:

$$y'_1 = \frac{x}{1+x^2}\,y_1 - \frac{1}{1+x^2}\,y_2 + 1\,;$$

$$y'_2 = \frac{1}{1+x^2}\,y_1 + \frac{x}{1+x^2}\,y_2\,;$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix},\; u_2 = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix};$$

Lösungen des homogenen Systems

Lösungsbasis; Lösung y des inhomogenen Systems durch Variation der Konstanten.

$$y = c_1(x)\, u_1 + c_2(x)\, u_2 ;$$

$$\Rightarrow\ y_1 = c_1(x) - c_2(x)\cdot x\ ;\ y_2 = c_1(x)\, x + c_2(x) ;$$

$$y'_1 = c'_1 - c'_2\, x - c_2 = \frac{x}{1+x^2}\left[c_1 - c_2\, x\right] - \frac{1}{1+x^2}\left[c_1\, x + c_2\right] + 1 = -c_2 + 1 ;$$

$$y'_2 = c'_1\, x + c_1 + c'_2 = \frac{1}{1+x^2}\left[c_1 - c_2\, x\right] + \frac{x}{1+x^2}\left[c_1\, x + c_2\right] = c_1 ;$$

$\Rightarrow$

$c'_1 - c'_2\, x = 1$;

$c'_1 + c'_2 = 0$;

$$c'_1 = \frac{1}{1+x^2}\ ;\ c_1 = \arctan x + k_1 ;$$

$$c'_2 = \frac{-x}{1+x^2}\ ;\ c_2 = -\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + k_2 ;$$

6.4 Bemerkung über DGL-Systeme höherer Ordnung

Gegeben:

(6) $y^{(k)} = g\left(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}\right)$

$x \in \mathbb{R}$, g, y : Vektorfunktionen $\mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}^n$

Definiere:

$z_1(x) := y(x)$, $z_2 := y'$, …, $z_k := y^{(k-1)}$

Aus (6) entsteht

$$\begin{aligned} z'_1 &= z_2 \\ z'_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ z'_{k-1} &= z_k \\ z'_k &= g(x, z_1, \ldots, z_k) \end{aligned}$$

Sei

$$z := \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\cdot k}$$

Aus (6) $\Rightarrow$ $z' := h(x, z)$.

Satz 6.7: Seien $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_k \in \mathbb{R}^n$ und $g(x, v_1, \ldots, v_k)$ eine n-komponentige vektorwertige Funktion. Ist g in einem Gebiet $G = G(x, v_1, \ldots, v_k) \subset \mathbb{R}^{n\cdot k+1}$ stetig und ist die Lipschitz-Bedingung

$$\left|g(x, v_1, \ldots, v_k) - g(y, w_1, \ldots, w_k)\right| \le M\sqrt{(v_1 - w_1)^2 + \ldots + (v_k - w_k)^2}$$

erfüllt, so geht durch jeden Punkt von G genau eine Lösung der DGL $y^{(k)} = g\left(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}\right)$.

Für lineare DGLen:

(8) $y^{(k)} = A_1(x)\, y + A_2(x)\, y' + \ldots + A_k(x)\, y^{(k-1)} + b(x)$,

A_i: (n, n)-Matrix-Funktionen, folgt:
DGL: $z' = B \cdot z + c$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ A_1 & A_2 & \cdots & \cdots & A_k \end{pmatrix} ; \; c = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

B: $(n \cdot k, n \cdot k)$-Matrix
0: (n, n)-Nullmatrix bzw. Nullvektor im $\mathbb{R}^n$
1: (n, n)-Einheitsmatrix

Definition 6.8: Seien $z_1(x), \ldots, z_k(x)$ im Intervall $I: x_a < x < x_e$ definiert. Diese Funktionen heißen im I **linear unabhängig**, wenn aus

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, z_i(x) = 0 \quad \forall \; x \in I, \; \alpha_i \in \mathbb{R}$$

folgt:

$\alpha_i = 0, \; i = 1, \ldots, k$.

Beispiel:
$z_1 := x; \; z_2 := \sin x;$

Versuche:
$\underset{x \in \mathbb{R}}{\forall} \; a\,x + b \sin x = 0; \quad a, b \in \mathbb{R}$
Wähle
$x = \pi \Rightarrow a\,\pi + 0 = 0 \Rightarrow a = 0;$

$x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow a\,\dfrac{\pi}{2} + b = 0 \Rightarrow b = \dfrac{-a\,\pi}{2} = 0;$

Satz 6.9: Seien die Funktionen $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ für $I: x_a < x < x_b$ Lösungen der DGL

$$y^{(k)} = a_1(x)\, y + a_2(x)\, y' + \ldots + a_k(x)\, y^{(k-1)}$$

(a_i: stetig auf I).
Dann sind $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ genau dann linear unabhängig, wenn $\exists \; W(x_0) \neq 0 \quad \forall \; x \in I$, wobei die **Wronski-Determinante** $W(x)$ durch

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_k(x) \\ y'_1(x) & \vdots & \cdots & y'_k(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(k-1)}(x) & y_2^{(k-1)}(x) & \cdots & y_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}$$

definiert ist;
$y_1 \ldots y_k$ sind linear abhängig $\Leftrightarrow \exists \; x_1 \in I$ mit $W(x_1) = 0$.

Beweis: $y_1, \ldots, y_k$ linear abhängig heißt nach 6.8:

(1) $\underset{l=1,\ldots,k}{\exists} \; \underset{\alpha_l \neq 0}{\exists} \; \underset{x \in I}{\forall} \; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \; y_i(x) = 0$

Gleichung gilt für alle $x \Rightarrow$

(1') $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \; y'_i(x) = 0 , \dots , \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \; y_i^{(k-1)}(x) = 0$

d.h. $y_1 , \dots , y_k$ linear abhängig

$\Rightarrow \underset{x \in I}{\forall} \; W(x) = 0$

denn: (1), (1') $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \alpha_1 \; y_1(x) + \alpha_2 \; y_2(x) + \dots + \alpha_k \; y_k(x) &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_1 \; y_1^{(k-1)}(x) + \dots + \alpha_k \; y_k^{(k-1)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

lineares Gleichungssystem für α_i: Nicht-triviale Lösung nur für $\det(\dots) = 0$.

Ist daher $W(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in I$, können $y_1 , \dots , y_k$ nicht linear abhängig sein $\Rightarrow$ Sie sind linear unabhängig.

Umgekehrt: $y_1 , \dots , y_k$ sind linear unabhängig $\Rightarrow W(x) \neq 0$.

Satz 6.10: Ist $z(x) = u(x) + i \; v(x)$ ($u(x)$, $v(x)$ reell, x reell) eine Lösung der DGL

$$z^{(k)} = A_1(x) \; z + A_2(x) \; z' + \dots + A_k(x) \; z^{(k-1)} + b(x)$$

($A_i(x)$, $b(x)$: reelle (n , n)-Matrix bzw. reeller Vektor), so ist $u(x)$ eine Lösung dieser DGL und $v(x)$ eine Lösung der homogenen DGL.

Beweis: Trennen von Real- und Imaginärteil.

Satz 6.11 (Reduktionssatz): Ist eine Lösung z der homogenen DGL

$$y'' = a_1(x) \; y + a_2(x) \; y'$$

bekannt, so lässt sich diese DGL auf eine trennbare DGL 1. Ordnung zurückführen.

Beweis: $y(x) =: z(x) \cdot v(x) \Rightarrow y'' = z'' \; v + 2 \; v' \; z' + 2 \; v''$;

$y'' = a_1 \; z \; v + a_2 (z' \; v + 2 \; v')$; $z'' = (a_1 \; z + a_2 \; z') \; v$;

$2 \; v' \; z' + z \; v'' = a_2 \; z \; v'$; sei $z \; v' \neq 0$:

$\frac{v''}{v'} = a_2 \cdot 2 \; \frac{z'}{z}$; $\ln |v'| + K = \int \left(a_2 - 2 \; \frac{z'}{z} \right) \mathrm{d} \; x$;

Bemerkungen:

1.) Dieses Verfahren funktioniert auch für die inhomogene DGL

$$y'' = a_1(x) \; y + a_2(x) \; y' + a_3(x) ,$$

wenn eine spezielle Lösung zu der homogenen DGL $y'' = a_1 \; y + a_2 \; y'$ *bekannt ist:*

$$y = z \cdot v \Rightarrow z \; v'' + (2 \; z' - a_2 \; z) \; v' = a_3 .$$

2.) Kommt in einer DGL 2. Ordnung y *nicht vor, setzt man* $p := y'$ *und erhält eine DGL 1. Ordnung (siehe 1.).*

3.) Analog: DGL n-ter Ordnung, in der $y^{(k)}$ *;* $k = 0 , 1 , \dots , l-1$ *nicht vorkommt. Setze* $p := y^{(l)}$.

Beispiel:

$y^{(4)} + 3 \; x^2 \; y^{(3)} = \sin x$ *; setze* $p := y^{(3)}$

$\Rightarrow p' + 3 \; x^2 \; p = \sin x$ *: lineare DGL 1. Ordnung.*

4.) *Andere Schreibweise für die lineare DGL n-ter Ordnung:*

$$\left(\frac{d^n}{d\,x^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{d\,x^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{d}{d\,x} + a_0(x)\right) y = b(x).$$

Manchmal gelingt es, die linke Seite in ein Produkt zu zerlegen:

$$\left(b_k(x)\frac{d^k}{d\,x^k} + b_{k-1}(x)\frac{d^{k-1}}{d\,x^{k-1}} + \ldots + b_0(x)\right)\left(c_l(x)\frac{d^l}{d\,x^l} + \ldots + c_0(x)\right)\cdot y = b(\,$$

.

Beispiel:

$$x\,y'' - (x^2+2)\,y' + 2\,x\,y = f(x) \Leftrightarrow$$
$$\left(\left(x\frac{d}{d\,x} - 2\right)\cdot\left(\frac{d}{d\,x}\cdot x\right)\right) y = f(x).$$

Um die Faktoren zu bestimmen, betrachte man zuerst die Koeffizienten von $d^n/d\,x^n$ *und von* y $\Rightarrow$ *2 DGLen: linear, von 1. Ordnung.*
Setze:

$$z := \left(\frac{d}{d\,x} - x\right) y \Rightarrow \left(x\frac{d}{d\,x} - 2\right) z = f(x) \quad \textit{(1.)}$$

2. mit der Lösung z *von 1.)* $(d/d\,x - x)\,y = z$.

Setze $f(x) := 6$ *:*

1.) $x\,z' - 2\,z = 6$ *; spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung* $z = -3$.
allgemeine Lösung: $z = K\,x^2 - 3$ *;* $K \in \mathbb{R}$

2.) $y' - x\,y = z = K\,x^2 - 3$
Lösung nach §5h:

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}\left(K_1 + \int^x (K\,v^2 - 3)\,e^{-\frac{v^2}{2}}\,d\,v\right)$$

5.) *In der DGL* $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ *kommt* x *nicht vor. Führe* $p(y) := y'$ *als neue Variable ein. Falls* $y' \neq 0$ *existiert die Umkehrfunktion* $x = x(y)$ $\Rightarrow$

$$y'' = \frac{d\,p}{d\,y}\,p$$

(p *ist Funktion von* y *!)*

$$y''' = \frac{d^2\,p}{d\,y^2}\,p^2 + \left(\frac{d\,p}{d\,y}\right)^2\cdot p$$

usw.
$\Rightarrow$ *Man erhält eine um 1 erniedrigte Ordnung in der DGL für* $p = p(y)$.

Beispiel:

$$y'' - \frac{1}{2}\frac{y'^2}{y} - 2\,y = 0 \Rightarrow p\frac{d\,p}{d\,y} - \frac{1}{2}\frac{p^2}{y} - 2\,y = 0$$

Ähnlichkeits-DGL: $u := p/y \Rightarrow d\,p/d\,y = u + y\,u'$ *; einsetzen in DGL* $\Rightarrow$

$$p(u + y\,u') - \frac{1}{2}\frac{u^2\,y^2}{y} - 2\,y = 0\,;$$

$$u^2\,y + u'\cdot u\cdot y^2 - \frac{1}{2}u^2\,y - 2\,y = 0\,;$$

$$u' = \frac{u}{-2\ y} + \frac{2}{u\ y}\ ;$$

trennbare DGL

$$\int \frac{\mathrm{d}\ u}{2/u - u/2} = \int \frac{\mathrm{d}\ y}{y} + k\ ;$$

Für $u \cdot y \neq 0$ *und* $2/u - u/2 \neq 0$ *: Ist* $2/u = u/2$ *, dann* $u^2 = 4$ *;*

$$u^2 = 4 = \left(\frac{y'}{y}\right)^2 \Rightarrow\ y = A\ e^{\pm 2\ x\ +\ x_0}$$

ist Lösung der DGL!

$$\int \frac{\mathrm{d}\ u}{2/u - u/2} = \int \frac{2\ u\ \mathrm{d}\ u}{4 - u^2} = -\ln\ (4 - u^2) = \ln\ \ y + k\ ;$$

$$y = \tilde{k}\ \frac{1}{4 - u^2} = \frac{\tilde{k}}{4 -\ p^2/\ y^2}\ ;$$

$$4\ y^2 -\ p^2 = \tilde{k}\ \ y\ ;$$

$$p = \pm\sqrt{4\ \ y^2 - \tilde{k}\ \ y}\ ;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\ y}{\sqrt{4\ y^2 - \tilde{k}\ y}} = \pm x + x_0 = \mathrm{atanh}\ \sqrt{1 - \tilde{k}/(4\ \ y)}$$

(Subsitution $z := 1/\ y$ *, Bronstein 127)*

7. Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

(1) $y'(x) = A \cdot y(x) + b(x)$
A : konstante (n, n)-Matrix; $y(x) \in \mathbb{R}^n$;

7.1 Ansätze für die Lösung der homogenen DGL

7.1a Exponentialfunktion von Matrizen

Sei A eine (n, n)-Matrix.
$A^0 = 1$ (Einheitsmatrix)
$A^1 = A$
$A^r = A \cdot A^{r-1} \quad r \in \mathbb{N}$

$$e^{Ax} := \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} A^r x^r \quad x \in \mathbb{R}$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig für alle A und alle x, denn sei $A = (A_{ik})$ und $M := \max\limits_{i,k} |a_{ik}|$
$\Rightarrow$ jedes Element von $A^r \leq n^{r-1} M^r$; $r \geq 1$.

Beweis durch Induktion:
A^1 hat Elemente $\subseteq M$
A^k wird mit Hilfe von A^{k-1} abgeschätzt.

$$A^k \leq \begin{pmatrix} M & \cdots & M \\ \vdots & & \vdots \\ M & \cdots & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n^{k-2} M^{k-1} & \cdots & n^{k-2} M^{k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ n^{k-2} M^{k-1} & \cdots & n^{k-2} M^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^{k-1} M^k & \cdots & n^{k-1} M^k \\ \vdots & & \vdots \\ n^{k-1} M^k & \cdots & n^{k-1} M^k \end{pmatrix}$$

$\leq$ ist komponentenweise zu verstehen
$\Rightarrow$ Jeder Summand in der Reihe

$$\sum \frac{1}{r!} A^r x^r$$

wird majorisiert durch Matrix mit Elementen

$$\frac{1}{r!} n^{r-1} M^r .$$

(Konvergenz der Reihe $\sum 1/(r!) B^r$ mit $B \in \mathbb{R}$ ist bekannt.)

***Bemerkung**: Gleichmäßige Konvergenz folgt hier aus der Konstanz der [...]*

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{Ax} = A\, e^{Ax}$

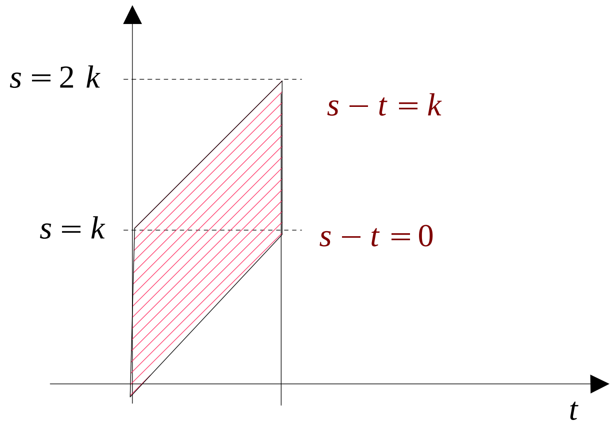
außerdem:

(3) $e^A e^B = e^{A+B}$ falls $[A, B] := A B - B A = 0$ (also Multiplikation kommutativ)

Beweis:

$$\sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!} (A+B)^s = \sum_{s=0}^{k} \sum_{t=0}^{s} \frac{1}{1!} \frac{s!}{t!(s-t)!} A^{s-t} B^t =$$

$$= \sum_{s-t=0}^{k} \sum_{t=0}^{k} \frac{1}{t!(s-t)!} A^{s-t} B^t - \sum_{s=k+1}^{2k} \sum_{t=s-k}^{k} \frac{s!}{s!\, t!(s-t)!} A^{s-t} B^t$$



$$\sum_{u=0}^{k} \sum_{t=0}^{k} \frac{1}{u!} \frac{1}{t!} A^n B^t - \sum_{s=k+1}^{2k} \frac{1}{s!} \sum_{t=s-k}^{k} \frac{s!}{t!(s-t)!} A^{s-t} B^t$$

$\Rightarrow e^A e^B$ für $k \to \infty$ (2. Term)

A wird majorisiert durch Matrix M mit lauter gleichen Elementen ≥ 0, analog B durch Matrix N.

2. Term =

$$\sum_{s=k+1} \frac{1}{s!} \sum_{t=s-k}^{k} \frac{s!}{t!(s-t)!} A^{s-t} B^t \leq \sum_{s=k+1}^{2k} \frac{1}{s!} \sum_{t=s-k}^{k} \frac{s!}{t!(s-t)!} M^{s-t} N^t$$

$$\leq \sum_{s=k+1}^{2k} \frac{1}{1!} \sum_{t=0}^{s} \frac{s!}{t!(s-t)!} M^{s-t} N^t = \sum_{s=k+1}^{2k} \frac{1}{s!} (M+N)^s \to 0 \text{ für } k \to \infty$$

(3) $\Rightarrow e^{A x_1} e^{A x_2} = e^{A(x_1+x_2)}$, $e^{-Ax} = (e^{Ax})^{-1}$

DGL $y'(x) = A\, y(x)$

(2) $\Rightarrow$ Matrix $Y(x) := e^{Ax}$ ist Lösung (sogar Fundamentalmatrix)

$Y(0) = 1$ (Einheitsmatrix)

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung des inhomogenen Problems (1):

(4) $z(x) = e^{Ax} z_0 + \int_0^x e^{A(x-t)} b(t)\, \mathrm{d}t$

Beispiel:

$y'_1 = -y_2 + 1$; $y'_2 = y_1 + 2$;

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = -1$

$$e^{Ax} = \sum_{r=\text{gerade}} \frac{x^r}{r!} (-1)^{\frac{r}{2}} \cdot 1 + \sum_{r=\text{ungerade}} \frac{x^r}{r!} (-1)^{\frac{r-1}{2}} \cdot A = \cos x \cdot 1 + \sin x \cdot A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix},$$

d.h. $\begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ bilden Lösungsbasis des homogenen Problems.

(4) $\Rightarrow$ Lösung des inhomogenen Problems:

$$z(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} z_0 - \underbrace{\begin{pmatrix} \sin(x-x) + 2\cos(x-x) \\ -\cos(x-x) + 2\sin(x-x) \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} +\sin x + 2\cos x \\ -\cos x + 2\sin x \end{pmatrix}$$

7.1b Synchronlösungen

> Ansatz für Lösung von $y' = A\, y$:
> $$y = y_0\, e^{\lambda x} \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

Dabei ist y_0 ein konstanter Vektor.

$y' = A\, y \Rightarrow \lambda\, e^{\lambda x}\, y_0 = A\, e^{\lambda x}$;
$\lambda\, y_0 = A\, y_0$;
$(A - \lambda \cdot 1)\, y_0 = 0$
$\Rightarrow$ λ ist Eigenwert von A $\Rightarrow$ löse charakteristische Gleichung $\det(A - \lambda\, 1) = 0$.

Falls alle Eigenwerte λ_i von A verschieden sind, sind die zugehörigen Eigenvektoren linear unabhängig.
$y_0^1\, e^{\lambda_1 x}, \ldots, y_0^n\, e^{\lambda_n x}$ bilden Lösungsbasis $\Rightarrow$ allgemeine Lösung:

> $$y(x) = c_1\, y_0^1\, e^{\lambda_1 x} + \ldots + c_n\, y_0^n\, e^{\lambda_n x} \qquad c_i \in \mathbb{R}$$

c_i so, dass Anfangsbedingungen erfüllt sind.

***Bemerkung**:*

1.) $y^{(k)} = a_1\, y + a_2\, y' + \ldots + a_k\, y^{(k-1)} \qquad (a_i \in \mathbb{R})$

2.)Falls ein Eigenwert λ komplex ist: Satz 6.10.

7.1c Mehrfache Eigenwerte

> **Satz 7.1**: Ist λ ein p-facher Eigenwert von A, so hat die DGL $y' = A\, y$ p linear unabhängige Lösungen $p_i(x)\, e^{\lambda x}$, $i = 1, \ldots, p$, wobei die Komponenten von $p_i(x)$ Polynome in x vom Grad $\leq i - 1$ sind.
> Bildet man diese Lösungen für alle Eigenwerte von A, erhält man eine Lösungsbasis.

Beweis: Zu jeder reellen (n, n)-Matrix A existiert eine Transformation T mit: $T^{-1}\, A\, T$ ist die **Jordansche Normalform** der Matrix A, d.h.

$$J := T^{-1}\, A\, T = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & D_2 & \\ 0 & & D_1 \end{pmatrix};$$

$$D_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & b_{1\,i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & b_{2\,i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & & & \lambda_i & b_{p_i-1} \\ & & & & & \lambda_i \end{pmatrix};$$

Hier sind $\lambda_i\ ;\ i=1,\ldots,q$ die Eigenwerte von A mit der Vielfachheit p_i. In J sind also alle Elemente $=0$ außer der Diagonalen und in den Plätzen rechts neben der Diagonalen:

$$b_{l\,i} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$\langle x\,,\,y\rangle = x^i\ y^k\ g_{i\,k} = (T\ T^{-1}\ X)^t\ g\ T\ T^{-1}\ y = \underbrace{(T^{-1}\ X)^t}\ \underbrace{T^t\ g\ T}\ \underbrace{T^{-1}\ y}$$

$$y' = A\ y \Rightarrow \underbrace{T^{-1}\ y'}_{z'} = \underbrace{T^{-1}\ A\ T}_{J}\ \underbrace{T^{-1}\ y}_{z}$$

$z' = J\ z$: Die DGL zerfällt in q getrennte DGL: $z'_i = D_i\ z_i\ ;\ i=1,\ldots,q$ mit

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_q \end{pmatrix}.$$

Schreibe

$$z_i = \begin{pmatrix} z_{i\,1} \\ \vdots \\ z_{i\,p_i} \end{pmatrix}$$

$$z'_{i\,1} = \lambda_i\ z_{i\,1} + b_{1\,i}\ z_{i\,2}\,;$$
$$z'_{i\,2} = \lambda_i\ z_{i\,2} + b_{2\,i}\ z_{i\,3}\,;$$
$$\vdots$$
$$z'_{i\,p_i} = \lambda_i\ z_{i\,p_i}\,;$$

Ansatz:

$$z_{i\,j} := e^{\lambda_i\,x}\ x_{i\,j}(x)\,;$$
$$x'_{i\,1} = b_{1\,i}\ x_{i\,2}\,;$$
$$x'_{i\,2} = b_{2\,i}\ x_{i\,3}\,;$$
$$x'_{i\,p_i} = 0\,;$$

d.h. $x_{i\,p_i} = k_0\,;\ x_{i\,p_i-1} = b_{i\,p_i-1}\ k_0\ x + k_1\,;$
$\ldots\ k_0\,,\,k_1\,,\ldots \in \mathbb{R}$, d.h.

$$z_i = \begin{pmatrix} x_{i\,1} \\ \vdots \\ x_{i\,p_i} \end{pmatrix} e^{\lambda_i\,x}$$

mit $x_{i\,j}$ Polynom in x vom Grad $\leq j-1$.
Wähle speziell alle $k_0,\ldots,k_{p_i-1} = 0$.

$$z_i^1 = \begin{pmatrix} k_{p_i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda_i\,x}$$

analog: k_{p_i} , $k_{p_i-1} \neq 0$, alle anderen $k_j = 0 \Rightarrow$

$$z_i^2 = \begin{pmatrix} k_{p_i-1} \cdot x + k_{p_i} \\ k_{p_i-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

usw. $\Rightarrow$ Lösungen zum Eigenwert λ_i in der Form $z_i^k = u_i^k \, e^{\lambda_i x}$; wo die u_i^k in den Komponenten maximal 1 Polynom vom Grad $k-1$ besitzen.

$$\tilde{z}_{i\,k} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ z_i^k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \; y_i^k := T \; \tilde{z}_i^k =: v_i^k(x) \, e^{\lambda_i x}$$

Wählt man $\forall \; z_i^k$ das zugehörige $k_{p_i+1-k} \neq 0$, so sind diese z_i^k linear unabhängig.

Besitzt die Matrix A den p -fachen Eigenwert λ , so macht man (meist) für alle Lösungen der DGL $y' = A \; y$ zum Eigenwert λ den gleichen Ansatz:

$$y = v(x) \, e^{\lambda x} = \begin{pmatrix} v_{1\,1} + v_{1\,2} \, x + \ldots + v_{1\,p} \, x^{p-1} \\ \vdots \\ v_{n\,1} + v_{n\,2} \, x + \ldots + v_{n\,p} \, x^{p-1} \end{pmatrix} e^{\lambda x}$$

(n : Zeilenzahl von A und y)

Einsetzen in DGL.

Beispiel:

$\frac{1}{2} \, x''_1 + y_1 - y_2 = 0$;

$y''_2 + \frac{1}{2} \, y_1 = 0$;

$\Rightarrow$:

$y'_1 = y_3$

$y'_2 = y_4$

$y'_3 = -2 \; y_1 + 2 \; y_2$

$y'_4 = -1/2 \; y_1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

charakteristisches Polynom:

$\lambda^4 + 2 \; \lambda^2 + 1 = 0$

$(\lambda^2 + 1)^2 = 0$;

$\lambda = \pm i$ ist jeweils Doppelwurzel: Ansatz (zunächst) für $\lambda = +i$:

$$y = \begin{pmatrix} v_1 + w_1\ x \\ v_2 + w_2\ x \\ v_3 + w_3\ x \\ v_4 + w_4\ x \end{pmatrix} e^{i\ x}$$

Einsetzen in DGL:

$i\ (v_1 + w_1\ x) + w_1 = v_3 + w_3\ x$
$i\ (v_2 + w_2\ x) + w_2 = v_4 + w_4\ x$
$i\ (v_3 + w_3\ x) + w_3 = -2\ (v_1 + w_1\ x) + 2\ (v_2 + w_2\ x)$
$i\ (v_4 + w_4\ x) + w_4 = -1/2\ (v_1 + w_1\ x)$

Koeffizientenvergleich für die Faktoren von x : Sei w_1 beliebig.

$w_2 = 1/2\ w_1$, $w_3 = i\ w_1$, $w_4 = 1/2\ w_1$;

Gleichungen beim Koeffizientenvergleich der konstanten Glieder sind linear. 1. und 3. Gleichung: gleiches Ergebnis wie 2. und 4. Gleichung $\Rightarrow$ es können zusätzliche Bedingungen gefordert werden.

1.) Setze $v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 0\ ;\ v_2 = i\ w_1\ ;\ v_3 = w_1\ ;\ v_4 = -1/2\ w_1$.

2.) Setze $v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = -2\ i\ w_1\ ;\ v_2 = 0\ ;\ v_3 = 3\ w_1\ ;\ v_4 = 1/2\ w_1$.

Lösungen zu $\lambda_i = +i$:

$$\bar{y}^1 = \begin{pmatrix} x \\ i + 1/2\ x \\ 1 + i\ x \\ -1/2 + i/2\ x \end{pmatrix} w_1\ e^{i\ x}\ ;$$

$$\bar{y}^2 = \begin{pmatrix} -2\ i + x \\ 1/2\ x \\ 3 + i\ x \\ 1/2 + i/2\ x \end{pmatrix} w_1\ e^{i\ x}$$

Trennen von Real- und Imaginärteil:

$$y^1 = \begin{pmatrix} x \\ x/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} w_1 \cos x - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \\ x/2 \end{pmatrix} w_1 \sin x\ ;$$

$$y^2 = \begin{pmatrix} x \\ x/2 \\ 3 \\ 1/2 \end{pmatrix} w_1 \cos x - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ x \\ x/2 \end{pmatrix} w_1 \sin x\ ;$$

$$y^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \\ x/2 \end{pmatrix} w_1 \cos x + \begin{pmatrix} x \\ x/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} w_1 \sin x\ ;$$

$$y^4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ x \\ x/2 \end{pmatrix} w_1 \cos x + \begin{pmatrix} x \\ x/2 \\ 3 \\ 1/2 \end{pmatrix} w_1 \sin x \,;$$

7.2 Eliminationsmethode

Versuche: Lösung einfacher DGL-Systeme durch Einsetzen der Gleichungen ineinander auf 1 DGL in 1 unbekannten Funktion zu reduzieren. Dabei differenziert man u.U. auch Gleichungen $y' = A\ y$:

1. Zeile:

$$y'_1 = a_{1\,1}\ y_1 + a_{1\,2}\ y_2 + \ldots + a_{1\,n}\ y_n\,;$$
$$y''_1 = a'_{1\,1}\ y_1 + a'_{1\,2}\ y_2 + \ldots + a'_{1\,n}\ y_n + a_{1\,1}\ y'_1 + a_{1\,2}\ y'_2 + \ldots + a_{1\,n}\ y'_n$$

Setze für $y'_2, \ldots, y'_n$ die übrigen Zeilen der DGL ein $\Rightarrow$ Gleichung der Form: $y''_1 = b_1\ y_1 + \ldots + b_n\ y_n$.

Verfahren fortsetzen:

$$y_1^{(n-1)} = d_1\ y_1 + d_2\ y_2 + \ldots + d_n\ y_n$$
$$y_1^{(n)} = e_1\ y_1 + e_2\ y_2 + \ldots + e_n\ y_n$$

Falls

$$\det \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \cdots & a_{n\,n} \\ b_{1\,1} & \cdots & b_{n\,n} \\ \vdots & & \\ d_{1\,1} & \cdots & d_{n\,n} \end{pmatrix} \neq 0\,,$$

lassen sich die Gleichungen $y'_1 = \ldots,\ y_1^{(n-1)} = \ldots$ eindeutig nach $y_2, \ldots, y_n$ auflösen. In diesem Fall ist

$$\det \begin{pmatrix} -y'_1 + a_{1\,1}\ y_1 & a_{1\,2} \ldots a_{1\,n} \\ -y''_1 + b_1\ y_1 & b_2 \ldots a_{1\,n} \\ \vdots & \vdots \\ -y_1^{(n)} + e_1\ y_1 & e_2 \ldots e_n \end{pmatrix} = 0\,.$$

Entwickle nach der 1. Spalte:

$$\left(-y_1^{(n)} + e_1\ y_1\right) \begin{vmatrix} a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_1 & \cdots & d_n \end{vmatrix} + \left(-y_1^{(n-1)} + d_1\ y_1\right) \ldots = 0$$

ist DGL für y_1.

Falls

$$\det \begin{pmatrix} a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_1 & \cdots & d_n \end{pmatrix} = 0\,,$$

kann man diese DGL trotzdem verwenden $\Rightarrow$ DGL niedrigerer Ordnung.

Achtung: Bei diesem Verfahren verliert man Informationen (Differenzieren) $\Rightarrow$ diese DGL ist nur *notwendig*, aber nicht *hinreichend*.

Abhilfe: Probe eliminiert die Integrationskonstanten, die dem ursprünglichen System widersprechen.

Beispiel:
(1) $y'_1 = y_2$; (2) $y'_2 = y_1$; (3) $y'_3 = y_1 + y_2$;
$\Rightarrow\ y''_1 = y_1 \Rightarrow\ y_1 = C\ e^x + D\ e^{-x}$;
$y_2 = C\ e^x - D\ e^{-x} + E$ aus (2)
$y_3 = 2\ C\ e^x + E\ x + F$ aus (3)
Einsetzen in (1) $\Rightarrow\ E = 0$ (nicht alle Lösungen bestehen die Probe!)

7.3 Methode der unbestimmten Koeffizienten

Im Fall einer DGL höherer Ordnung *mit konstanten Koeffizienten* existiert ein Ansatz zur Ermittlung einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung.

DGL:

$$\sum_{k=0}^{n} a_n \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\ x^k}\ y = b\,(x)\ ; \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

Ansatz:

$$y_0 = \sum_{i=0}^{p} c_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ x^i}\ b\,(x)\ ; \qquad c_i \in \mathbb{R}$$

Dieser Ansatz ist *nur* dann sinnvoll, wenn $p < \infty$, d.h. wenn die Summanden von $b\,(x)$ nach p Ableitungen Null werden oder gleich einer früheren Ableitung.

Beispiel:

$$b\,(x) = \underbrace{\sin\ x}_{p=1}\ ,\ \underbrace{\cos\ x}_{p=1}\ ,\ \underbrace{e^x}_{p=0}\ ,\ \underbrace{const}_{p=0}\ ,\ \underbrace{x^3}_{p=3}\ ,\ \ldots$$

z.B. $y'' + 3\ y' - 4\ y = e^{2\,x} + x^2$:
spezielle Lösung $y_0 = c_1\ e^{2\,x} + c_2\ x^2 + c_3 + c_4$
$4\ c_1\ e^{2\,x} + 2\ c_2 + 6\ c_1\ e^{2\,x} + 6\ c_2\ x + 3\ c_3$
$-4\ c_1\ e^{2\,x} - 4\ c_2\ x^2 - 4\ c_3\ x - 4\ c_4 = e^{2\,x} + x^2$

Koeffizientenvergleich:
$e^{2\,x}\,(6\ c_1 - 1) = 0 \Rightarrow\ c_1 = 1/6$;
$x^2\,(-4\ c_2 - 1) = 0 \Rightarrow\ c_2 = -1/4$;
$x\,(6\ c_2 - 4\ c_3) = 0 \Rightarrow\ c_3 = -3/8$;
$1\,(2\ c_2 + 3\ c_3 - 4\ c_4) = 0 \Rightarrow\ c_4 = -13/32$;

Also:

$$y_0\,(x) = \frac{1}{6}\ e^{2\,x} - \frac{1}{4}\ x^2 - \frac{3}{8}\ x - \frac{13}{32}\ .$$

Vorsicht:

1.) Ein Summand von $b\,(x)$ ist gleichzeitig Lösung der homogenen DGL:
Sei $b\,(x) = u\,(x) + v\,(x)$ und $u\,(x)$ Lösung von

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\ x^k}\ y = 0$$

zum s-fachen Eigenwert λ .

Dann macht man den Ansatz statt für $u(x)$ für $x^s\,u(x)$ und dessen Ableitungen:

Beispiel:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}-2\right)^2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}+3\right)y=e^{2\,x}+\sin(-x)$$

DGL mit konstanten Koeffizienten $\Rightarrow$ Klammern vertauschen

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}+3\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}-2\right)^2 y=\ldots$$

Ansatz $y=e^{\lambda\,x}$ für die homogene DGL $\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=2\ ;\ \lambda_3=-3\ ;$

Lösungsbasis: $e^{2\,x}$, $x\,e^{2\,x}$, $e^{-3\,x}$

$b(x)=e^{2\,x}+\sin(-x)$.

Term $e^{2\,x}$ ist auch Lösung des homogenen Systems zum 2-fachen Eigenwert $\lambda=2$. $\Rightarrow$ Ansatz für y_0:

$$y_0=c_1\,x^2\,e^{2\,x}+c_2\,x\,e^{2\,x}+c_3\,e^{2\,x}+c_4\sin(-x)+c_5\cos(-x)\,.$$

2.) Ein Summand von $b(x)$ ist von der Form $x^r\,u(x)$, wo $u(x)$ Lösung der homogenen DGL zum s-fachen Eigenwert λ ist.

$\Rightarrow$ Ansatz für y_0: Statt $x^r\,u(x)$ schreibt man $x^{r+s}\,u(x)$ und alle zugehörigen Ableitungen.

Beispiel:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}-2\right)^2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{D}\,x}+3\right)y=x^3\,e^{2\,x}+\sin(-x)\,;$$

Ansatz:

$$y_0=c_1\,x^{3+2}\,e^{2\,x}+c_2\,x^4\,e^{2\,x}+c_3\,x^3\,e^{2\,x}+c_4\,x^2\,e^{2\,x}+c_5\,x\,e^{2\,x}+c_6\,e^{2\,x}+c_7\sin(-x)+c_8\,\mathrm{c}$$

.

8. Randwertaufgaben

Bisher: *Anfangswertprobleme*: $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $y''(x_0)$ vorgegeben.

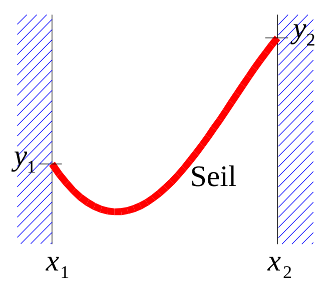
Randwertprobleme: Werte von y und dessen Ableitungen an *verschiedenen* Punkten vorgegeben.

DGL 2. Ordnung:

- $y(x_1) = y_1$; $y(x_2) = y_2$; Randwertaufgabe 1. Art
- $y'(x_1) = y'_1$; $y'(x_2) = y'_2$; Randwertaufgabe 2. Art
- $a\ y(x_1) + b\ y'(x_1) = c$;
  $d\ y(x_2) + e\ y'(x_2) = f$;
  Sturmsche Randwertaufgabe

Beispiel für *lineare* Randwertaufgaben, bei denen $y(x_i)$, $y'(x_i)$, …, $y^{(k-1)}(x_i)$ linear eingeben.
Beispiel: Balken, der auf beiden Seiten aufliegt.

Beispiele für nichtlineare Randwertbedingungen:



Randbedingungen:

1.) $y(x_1) = y_1$

2.) $y(x_2) = y_2$

3.) Länge des Seils:

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}\ y}{\mathrm{d}\ x}\right)^2}\ \mathrm{d}\ t$$

Anwendung z.B. in Proteinforschung.

8.1 Lösbarkeit von linearen Randwertaufgaben bei linearen DGLs

8.1a Bezeichnungen

Lineare DGL:
$a_k(x)\ y^{(k)} + a_{k-1}\ y^{(k-1)} + \ldots + a_0(x)\ y = b(x)$;

Schreibe dafür: $L(y) = b(x)$ mit $L(y) := a_k(x)\ y^{(k)} + \ldots + a_0(x)\ y$.

Analog für die linearen Randbedingungen:
$U_i(y) = V_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Sturmsche Randwertaufgabe:
$U_1(y) = a\ y(x_1) + b\ y'(x_1)$
$U_2(y) = d\ y(x_2) + e\ y'(x_2)$
Im Fall $V_i = 0$ für alle i nennt man die Randwertaufgabe **halbhomogen** – ebenso im Fall $L(y) = 0$.
Falls $V_i = 0$ für alle i *und* $L(y) = 0$, heißt die Aufgabe **vollhomogen**.

Kennt man eine spezielle Lösung z der inhomogenen Gleichung $L(y) = b(x)$, liefert $y = z + w$ die DGL $L(w) = 0$. (L linear!)

Analog:
Ist r eine Lösung des inhomogenen Randwertproblems, erfüllt $s(x)$ in $y = r + s$ die homogene Randbedingung $U_i(s) = 0\ ;\ i = 1, \dots, k$. Dies folgt aus der Linearität der Randwertaufgabe, unabhängig davon, ob $r(x)$ eine Lösung der DGL ist oder nicht.

8.1b Lösbarkeit

Satz 8.1: Sei $L(y) = 0$ eine homogene linerare DGL n-ter Ordnung. Die lineare Randwertaufgabe $L(y) = 0\ ;\ U_i(y) = V_i\ ;\ i = 1, \dots, n$ ist genau dann lösbar, wenn für ein Fundamentalsystem

$\overset{1}{y}, \dots, \overset{n}{y}$

der Lösungen von $L(y) = 0$ der Rang der Matrizen H und I gleich ist, wo

$$H := \begin{pmatrix} U_1\left(\overset{1}{y}\right) & \dots & U_1\left(\overset{n}{y}\right) \\ U_2\left(\overset{1}{y}\right) & & \\ \vdots & & \\ U_n\left(\overset{1}{y}\right) & \dots & U_n\left(\overset{n}{y}\right) \end{pmatrix},\quad I := \begin{pmatrix} U_1\left(\overset{1}{y}\right) & \dots & U_1\left(\overset{n}{y}\right) & V_1 \\ U_2\left(\overset{1}{y}\right) & & & V_2 \\ \vdots & & & \\ U_n\left(\overset{1}{y}\right) & \dots & U_n\left(\overset{n}{y}\right) & V_n \end{pmatrix}$$

gilt.
Die Aufgabe ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det M \neq 0$ ist.

Beweis: Sei

$\overset{1}{y}(x), \dots, \overset{n}{y}(x)$

ein Fundamentalsystem von Lösungen der DGL $L(y) = 0$.
Allgemeine Lösung:

$y(x) = C_1 \overset{1}{y}(x) + \dots + C_n \overset{n}{y}(x)$ mit $C_i \in \mathbb{R}\,\cdot$

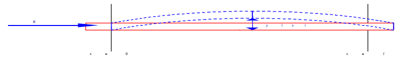
U_i ist linear $\Rightarrow$

$U_i(y) = C_1 U_i\left(\overset{1}{y}\right) + \dots + C_n U_i\left(\overset{n}{y}\right) = V_i\,\cdot$

Das ist ein lineares Gleichungssystem für C_i Bedingungen für die Lösbarkeit: Satz 8.1

Zusatz: Vollhomogenes Problem $L(y) = 0\ ;\ U_i(y) = 0$ besitzt genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn $\det H = 0$ ist.

Beispiel: zum homogenen Problem: Balken, der an beiden Enden aufliegt (Pleuel, Kurbelstange ...)



DGL: linearisiert $y'' = M(x)/Q$
Q : Konstante (Elastizitätsmodul x axiales Flächenträgheitsmoment)
$M(x)$: Drehmoment: $M(x) = -K\ y(x)$
$L(y) \equiv y'' + \frac{K}{Q}\ y = 0$;

Sei
$\lambda = \sqrt{\frac{K}{Q}} \Rightarrow y(x) = C_1 \sin \lambda\ x + C_2 \cos \lambda\ x$
$U_1(y) = y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0;\ U_2(y) = y(l) = 0$
$y(x) = C_1 \sin \lambda\ x$
Falls: $\lambda\ l < \pi$, d.h. $K < \pi^2/l^2\ Q$: $\Rightarrow C_1 = 0$ und $y(x) = 0$
Falls: $\lambda\ l = \pi$: $\Rightarrow C_1$ beliebig: Balken biegt sich beliebig weit, bis er bricht.

8.2 Greensche Funktion

Es sei das lineare Randwertproblem
(1) $L(y) = r(x)\ ;\ U_i(y) = 0$
gegeben.

Berechne zuerst die Lösung von
(2) $L(y) = \delta(x - \xi)\ ;\ U_i(y) = 0$.

Diese Lösung nennt man $G(x, \xi)$
$\Rightarrow$ Lösung von (1) durch
$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)\ r(\xi)\ \mathrm{d}\ \xi\ ; \quad a < x < b ,$$
denn

1) $L(y) = \int_a^b L(G)\ r(\xi)\ d\ \xi = \int_a^b \delta(x - \xi)\ r(\xi)\ \mathrm{d}\ \xi = r(x)$

2) $U_i(y) = \int_a^b U_i(G)\ r(\xi)\ \mathrm{d}\ \xi = \int_a^b 0 \cdot r(\xi)\ \mathrm{d}\ \xi = 0$

8.2a Konstruktion der Greenschen Funktion

Definition 8.2: Eine Funktion $G(x, \xi)$, die folgenden Bedingungen erfüllt, heißt **Greensche Funktion**:

1) $G(x, \xi)$ erfüllt bei festem ξ die Randbedingungen $U_i(G) = 0$ (U_i linear)

2) Ist $a \le x \le b$ der Definitionsbereich von L , so ist
$G(x, \xi)$, $\frac{\partial G}{\partial x}$, … , $\frac{\partial^{n-2} G}{\partial x^{n-2}}$
stetig für $a \le x \le b$; $a \le \xi \le b$; n ist die Ordnung von L

3) Für $a \le x \le b$, $a \le \xi \le b$ existieren die
$\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}$ und $\frac{\partial^n G}{\partial x}$
mit Ausnahme von $x = \xi$; dort gilt:
$$\lim_{a \to 0} \left[\frac{\partial^{n-1} G(\xi + a, \xi)}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial^{n-1} G(\xi - a, \xi)}{\partial x^{n-1}} \right] = \frac{1}{A_n(\xi)}$$
4) Für $x \ne \xi$ erfüllt $G(x, \xi)$ bei festem ξ: $L(G) = 0$. Dabei ist L ein linearer Differenzialoperator n-ter Ordnung:
$$L(y) = \sum_{i=0}^{n} A_i(x)\, y^{(i)};$$
$A(x)$ stetig für $a \le x \le b$; $A_n(x) \ne 0$

Ist
$$y c^1, \dots, \overset{n}{y}$$
ein Fundamentalsystem von Lösungen von $L(y) = 0$, muss $G(x, \xi)$ für $x \ne \xi$ eine Linearkombination von
$$\overset{i}{y}$$
sein.
$$G(x, \xi) = \sum_{i=1}^{n} c_i^1 \overset{i}{y}$$
für $x < \xi$
$$G(x, \xi) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \overset{i}{y}$$
für $x > \xi$

c_i^1, c_i^2 hängen von ξ ab.

Definiere:
$$a_i := \frac{1}{2}(c_i^1 + c_i^2); \quad b_i := \frac{1}{2}(c_i^1 - c_i^2);$$
$$G(x, \xi) = \sum (a_i + b_i) \overset{i}{y}$$
für $x < \xi$
$$G(x, \xi) = \sum (a_i - b_i) \overset{i}{y}$$
für $x < \xi$
$$G(x, \xi), \frac{\partial G}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n-2} G}{\partial x^{n-2}}$$
sind an $x = \xi$ stetig $\Rightarrow$
$$\sum b_i \overset{i}{y}(\xi) = 0;\ \sum b_i \overset{i}{y}'(\xi) = 0;\ \sum b_i \overset{i}{y}^{(n-2)}(\xi) = 0;\ \sum b_i \overset{i}{y}^{(n-1)}(\xi) = 0$$
lineares Gleichungssystem für die b_i, dessen Koeffizientendeterminante die Wronski-Determinante

ist. Sie ist $\neq 0$, da die $\overset{i}{y}$ ein Fundamentalsystem bilden $\Rightarrow$ Gleichungssystem ist immer eindeutig lösbar.

a_i aus den Randbedingungen berechenbar:

$$U_k(G) = \sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i)\, U_k(\overset{i}{y}) = 0$$

„+“, wenn sich U_k auf ein $x_k < \xi$ bezieht.
„-“, wenn sich U_k auf ein $x_k > \xi$ bezieht.

(3) $\sum_{i=1}^{n} a_i\, U_k(¿\, i) = \mp \sum_{i=1}^{n} b_i\, U_k(\overset{i}{y})$ Gleichungen für a_i.

Satz 8.3: Sei L ein lienarer Differenzialoperator n-ter Ordnung, $r(x)$ eine stetige Funktion und $U_i(y) = 0\ ;\ I = 1, \ldots, n$ lineare Randbedingungen.
Dann ist die Greensche Funktion für das Problem $L(y) = r(x),\ U_i(y) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, genau dann eindeutig bestimmt, wenn

$$\det H := \det \begin{pmatrix} U_1\left(\overset{1}{y}\right) & \ldots & U_1\left(\overset{n}{y}\right) \\ U_2\left(\overset{1}{y}\right) & & \\ \vdots & & \\ U_n\left(\overset{1}{y}\right) & \ldots & U_n\left(\overset{n}{y}\right) \end{pmatrix} \neq 0$$

gilt (vgl. Satz 8.1).
Mit dem Ansatz

$G(x, \xi) = \sum (a_i + b_i)\, \overset{i}{y}$ ($\overset{i}{y}$: Fundamentalsystem)

berechnen sich die a_i aus den Randbedingungen und die b_i aus den Stetigkeitsforderungen.

***Bemerkungen**:*

1) *Im Fall* $\det H = 0$ *kann es eine Greensche Funktion geben, sie ist dann nicht eindeutig bestimmt.*

2) *Beschränkung auf halbhomogene Systeme ist nicht wesentlich: Randbedingungen* $U_k(y) = V_k$ *ändern die Struktur von (3) nicht; Satz 8.3 bleibt gültig*

Zu zeigen: G nach Definition 8.2 liefert eine Lösung des Randwertproblems durch:

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, r(\xi)\, d\xi$$

(G nach 8.2 definiert $\neq$ bis jetzt $= L(G) = \delta$)

Differenzieren von (4)

$$\Rightarrow\ y^{(k)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^k G(x, \xi)}{\partial x^k}\, r(\xi)\, d\xi\ ;\ k = 0, \ldots, n-1$$

$$\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}$$

enthält Unstetigkeitsstelle bei $x = \xi$.

Definition 8.2 $\Rightarrow$

(5) $\dfrac{\partial^n G(x,\xi)}{\partial x^n} = G^*(x,\xi) + \dfrac{1}{A_n(x)}\,\delta(x-\xi)$;

dabei ist G^* stetig.

(Begründung:

$\int f(\xi)\,\delta(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi = f(x)$; Definition der Delta-Funktion; dann gilt:

$\mathrm{d}/\mathrm{d}x\ \vartheta(x-\xi) = \delta(x-\xi)$; (muss man nur auf beiden Seiten integrieren, dann kommt vorhergehende Zeile heraus))

Integriere (5) nach x :

$$\int_a^b \frac{1}{A_n}\,\delta\,\mathrm{d}x = \frac{1}{A_n(\xi)}$$

falls $b > \xi$; $\quad = 0$ für $b < \xi$.

$$L(G) = \sum_{i=0}^{n} A_i \frac{\partial^i G}{x^i} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} A_i \frac{\partial^i G}{\partial x^i} + A_n G^*}_{=0\text{ , weil } L(G)=0 \text{ für } x \neq \xi} + \delta(x-\xi)$$

$$\Rightarrow L(G) = \delta(x-\xi)$$

$$L(y) = L\left(\int_a^b G(x,\xi)\,r(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right) = \int_a^b L\big(G(x,\xi)\big)\,r(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_a^b \delta(x-\xi)\,r(\xi)\,\mathrm{d}\xi = r(x)$$

.

Beachte:

$$U_i(G) = 0 \Rightarrow U_i(y) = \int_a^b \underbrace{U_i(G)}_{=0}\,r(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0$$

Bemerkung: *Sind die Randbedingungen inhomogen, d.h.* $U_i(y) = V_i$ *, hat man bei der Berechnung von* G *(genauer: beim inhomogenen linearen Gleichungssystem für die* a_i *)*

$$U_i(G) = \frac{V_i}{\int_a^b r(\xi)\,\mathrm{d}\xi}$$

zu fordern.

Beispiel: Für $0 \le x \le \pi$ sei die DGL $y'' + y = r(x)$ mit $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$ gegeben.

Fundamentalsystem für Lösungen der homogenen DGL: $y_1 = \cos x$; $y_2 = \sin x$.

1.) Berechnung der b_i :

$b_1(\xi)\cos\xi + b_2(\xi)\sin(\xi) = 0$

$-b_1(\xi)\sin\xi + b_2(\xi)\cos\xi = -1/2$

$\Rightarrow b_1 = \dfrac{1}{2}\sin\xi$; $b_2 = -\dfrac{1}{2}\cos\xi$;

2.) Berechnung der a_i :

a) $(a_1+b_1)\cos(0)+(a_2+b_2)\sin 0=(a_1-b_1)\cos(\pi)+(a_2-b_2)\sin\pi$
$a_1+b_1=-a_1+b_1 \Rightarrow a_1=0$

b) $(a_2+b_2)\cos(0)=(a_2-b_2)\cos\pi$ bzw. $a_1+b_2=-(a_2-b_2)$
$a_2+b_2=-a_2+b_2 \Rightarrow a_2=0$

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin\xi\cos x-\frac{1}{2}\cos\xi\sin x \text{ für } x<\xi\\ -\frac{1}{2}\sin\xi\cos x+\frac{1}{2}\cos\xi\sin x \text{ für } x>\xi\end{cases}$$

Hier ist immer $G(x,\xi)$ immer $\geq 0 \Rightarrow$

$$G(x,\xi)=\frac{1}{2}\left|\sin(x-\xi)\right|$$

[3 Grafiken]

2. Beispiel: Kritische Drehzahlen einer rotierenden Welle
Problem: Welle dreht sich mit $f=\omega/(2\pi)$ U/s . Sie ist bei $x=0$ und $x=l$ gelagert.

[Grafik Welle]

Schwache Verbiegung:

$$y''=\frac{M(x)}{Q} \quad (14)$$

$M(x)$: Biegemoment bzw. Drehmoment, das bei x angreift
Q : Elastizitätsmodul * Flächenträgheitsmoment
$M(x)=$ Weg * Kraft (Lagerkraft ($R\in\mathbb{R}$) + Fliehkraft) in y-Richtung: $\omega^2\, y\cdot\varrho\, \mathrm{d}\, x$ (Winkelhalbierende)

$$M(x)=\int_x^l \omega^2\, y(u)\,\varrho\,(u-x)\,\mathrm{d}\,u+(l-x)\cdot R$$

$$M'(x)=-0-\int_x^l \omega^2\, y(u)\,\varrho\,\mathrm{d}\,u-R$$

$$M''=\omega^2\, y(x)\,\varrho$$

Einsetzen in $y''=M/Q$:

$$y^{(4)}=\frac{\omega^2\,\varrho}{Q}\,y=:q^4\,y$$

Randbedingung: $y(0)=y(l)=0$; $M(l)=0$; $\Rightarrow$ $y''(l)=0\Rightarrow y''(0)=0$;

Allgemeine Lösung der DGL:
$y=e^{\lambda x}\Rightarrow\lambda^4=q^4$;
$\lambda_1=q$; $\lambda_2=-q$; $\lambda_3=i\,q$; $\lambda_4=-i\,q$;
$y=K_1\,e^{q\,x}+K_2\,e^{-q\,x}+K_3\cos q\,x+K_4\sin q\,x$;

Lösung der Randwertaufgabe ohne Greensche Funktion:
$y(0)=0\Rightarrow K_1\cdot 1+K_2\cdot 1+K_3\cdot 1+K_4=0$; $\Rightarrow K_1+K_2=0$;
$y''(0)=0\Rightarrow q^l(K_1+K_2-K_3)=0\Rightarrow K_3=0$
$y(l)=0\Rightarrow K_1\,e^{q\,l}+K_2\,e^{-q\,l}+K_4\sin q\,l=0$, sei $l\neq 0$, $q\neq 0$
$y''(l)=0\Rightarrow K_1\,e^{q\,l}+K_2\,e^{-q\,l}-K_4\sin q\,l=0$

$\Rightarrow K_1 (e^{q\,l} - e^{-q\,l}) = 0 \Rightarrow K_1 = K_2 = 0$

$\Rightarrow y = K_4 \sin q\,x$ mit $K_4 \sin q\,l = 0$

1. Fall: $0 < q\,l < \pi \Rightarrow \sin q\,l \neq 0 \Rightarrow K_4 = 0$

2. Fall: $q\,l = \pi \Rightarrow K_4$ beliebig ($\Rightarrow \omega = \sqrt{Q/\varrho}\ \pi^2/l^2$)

3. Fall: $\pi < q\,l < 2\,\pi \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{Q/\varrho}\ \pi^2/l^2 < \omega < \omega_2 = \sqrt{Q/\varrho}\ 4\,\pi^2/l^2$

[Grafik Welle mit Riemen]

Welle mit Riemen:
Näherung: Riemen liefert eine Kraft

$$K \cdot \left[\left(\frac{l}{2} - x \right)^2 + K_1 \right]$$

(Berücksichtige die Elastizität des Riemens!)

$$M(x) = \int_x^l \omega^2\, y(u)\,(u-x)\,\mathrm{d}\,u + (l-x)\cdot R + (l-x)\cdot \left[\left(\frac{l}{2} - x \right)^2 + K_1 \right]$$

Bei M'' fällt der K_1-Term weg.

Greensche Funktion

Merkregeln:

1) Greensche Funktion hilft bei homogenen Problemen *nichts*.
2) I.A. ist es auch bei inhomogenen DGL schneller, die Randbedingung direkt (d.h. ohne Greensche Funktion) auszuwerten, außer wenn:
   a) Die Lösung der inhomogenen DGL schwer zu ermitteln ist (bei der Greenschen Funktion ist nur die Kenntnis der Lösungen der homogenen DGL nötig)
   b) Die Rechnung für mehrere inhomogene Glieder $b(x)$ gleichzeitig gemacht werden soll.

[...]

[...]

$a_i(\xi)$ aus den Randbedingungen:

1) $G(0, \xi) = 0 \Rightarrow \sum_1^4 (a_i(\xi) + b_i(\xi))\ y_i(0) = 0 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = -b_1 - b_2 - b_3 =$
   $= \dfrac{e^{-q\,\xi} - e^{q\,\xi} + 2 \sin q\,\xi}{8\,q^3}$
2) $G''(0, \xi) = 0 \Rightarrow \sum (a_i(\xi) + b_i(\xi))\ y''_i(0) = 0 \Rightarrow a_1 + a_2 - a_3 =$
   $= -b_1 - b_2 + b_3 = \dfrac{e^{-q\,\xi} - e^{q\,\xi} - 2 \sin q\,\xi}{8\,q^3}$
3) $G(l, \xi) = 0 \Rightarrow \sum (a_i(\xi) - b_i(\xi))\ y_i(l) = 0 \Rightarrow a_1\, e^{q\,l} + a_2\, e^{-q\,l} + a_3 \cos q\,l + a_4 \sin q\,l =$

$$= \frac{-e^{-q\,\xi+q\,l} + e^{q\,(\xi-l)} - 2\,\sin\,q\,\xi\,\cos\,q\,l + 2\,\cos\,\xi\,\sin\,q\,l}{8\,q^3}$$

4) $G''\,(l,\xi) = 0 \Rightarrow \sum (a_i\,(\xi) - b_i\,(\xi))\;y''_i\,(l) = 0 \Rightarrow$
$a_1\,e^{q\,l} + a_2\,e^{\text{¿}}\,-ql - a_3\,\cos\,ql - a_4$

[...]

9. Funktionentheorie

9.1 Komplexe Zahlen

$\mathbb{C} := \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$

mit:

- Addition: $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$
- Multiplikation: $(a, b) \cdot (c, d) := (a c - b d, a d + b c)$

Zwei Elemente (a, b) und (c, d) heißen gleich, wenn $a = c$ und $b = d$ $\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ ist ein Körper.

Gewöhnlich: Statt (a, b) schreibe $a + i b$.
i : **Imaginäre Einheit**: $i^2 = -1$
Falsch: i ist nicht *die* Wurzel aus -1.

$\overline{y \pm z} = \overline{y} \pm \overline{z}$;

$\overline{y \cdot z} = \overline{y} \cdot \overline{z}$;

$\overline{\left(\frac{y}{z}\right)} = \frac{\overline{y}}{\overline{z}}$

$e^{i \phi} = \cos \phi + i \sin \phi$

9.2 Definition der stereographischen Projektion

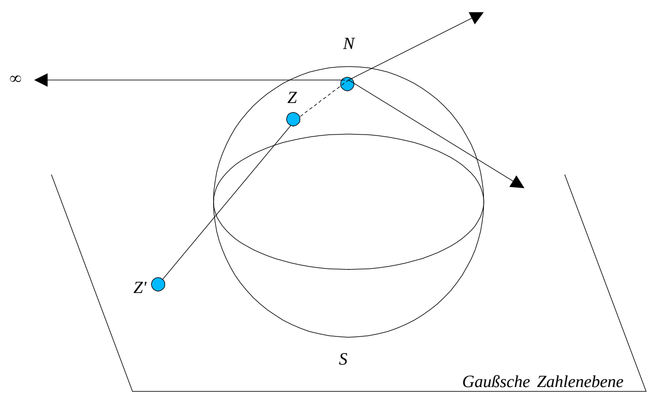


Bild von N
:= ∞

(*alle* Grenzwerte, d.h. $\exists_1$ Punkt „Unendlich")

1. Vorteil dieser Definition: $1/0 = \infty$ (möglich, da 1 Punkt ∞ existiert).
2. Menge M heißt kompakt, wenn es in jeder offenen Überdeckung von M endlich viele Mengen gibt, die M überdecken.
3. S^2 ist kompakt. Bilder kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen sind kompakt. [Beweis] $\Rightarrow$ Gaußsche Zahlenebene $u \{\infty\}$ ist kompakt.

Beweis:
Eine Funktion f heißt stetig, wenn die Urbilder offener Mengen offen sind.

$$f: \underbrace{M}_{\text{kompakt}} \to N$$

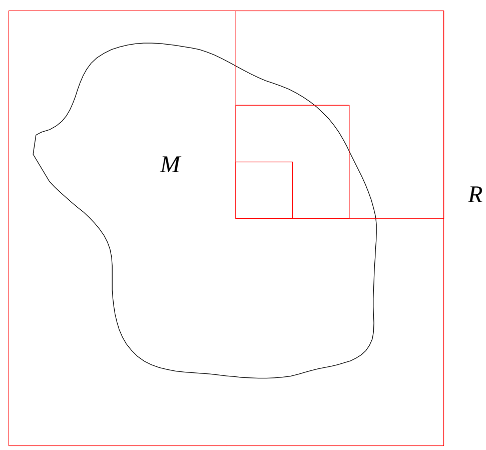
Überdecke N mit offenen Mengen U_i; $i \in I$ (beliebig). f stetig $\Rightarrow$ $f^{-1}(U_i)$ sind offen und überdecken M. M kompakt $\Rightarrow$ wähle endlich viele davon, die M überdecken. $\Rightarrow$ U_i überdecken $f(M)$.

Satz 9.2 (Heine-Borel): In einer Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ (oder $M \subset \mathbb{C}$) gilt: M ist abgeschlossen und beschränkt $\Rightarrow$ M ist kompakt (Beweis gilt auch $\Leftarrow$, wie man leicht einsieht).

Beweis:

Beweis durch Widerspruch: Nehme an, dass M nicht kompakt ist, d.h. dass eine offene Überdeckung D existiert, von der nicht endlich viele $D_i \in D$ die Menge M überdecken.

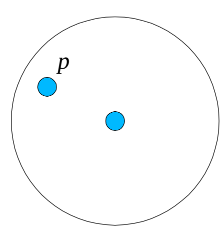
„ M beschränkt" heißt, dass sich M in ein Quadrat R mit einer Diagonalen der Länge $a < \infty$ einschließen lässt.



Teile R in 4 kongruente Quadrate (Abstand zweier Punkte $\leq a/2$). Für die Überdeckung von mindestens einem dieser Quadrate ($\rightarrow$ genauer $Q \cap M$) sind unendlich viele $D_{\hat{\imath}}$ nötig.

Dieses teilt man wieder in 4 kongruente Quadrate [...] Abstand zweier Punkte $\leq a/4$ [...] $\Rightarrow$ Folge von Teilmengen $R \supset R_1 \supset R_2 \ldots$, zu deren Überdeckung ($R_i \cap M$) jeweils unendlich viele D_i nötig sind. Abstand zweier Punkte in R_i geht $\rightarrow 0$.

M abgeschlossen $\Rightarrow$ Grenzwerte liegen in M $\Rightarrow$ R_i konvergieren gegen einen Punkt $p \in M$. D ist Überdeckung von M, offene Mengen sind Vereinigungen von ε-Umgebungen. $\Rightarrow$ Es existiert eine offene Menge $d_p \in D$, die p enthält. D_p ist Vereinigung von ε-Umgebungen. Sei U_ε eine davon, die p enthält $\Rightarrow$ U_ε überdeckt nicht nur p, sondern alle R_i von einem Index j an.



Definition 9.3:

1) Eine Menge $M \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt (bogen-)**zusammenhängend**, wenn gilt: Alle $p, q \in M$ können durch eine stetige Kurve verunden werden, die ganz in M liegt.

2) Eine Menge $M \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt **Gebiet**, wenn sie offen und zusammenhängend ist.

Bemerkung: *Falls nicht bemerkt wird, sind ab hier die Definitionsbereiche von Funktionen Gebiete.*

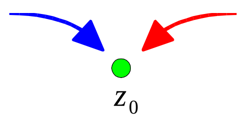
f heißt **stetig** in $z_0 \in \mathbb{C}$, wenn

$$\lim_{z \to z_0} f(z)$$

existiert und

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \quad (1)$$

gilt.



Der „Weg“ $z \to z_0$ ist *nicht* spezifiziert, d.h. dieser Limes muss für *alle* „Wege“ (1) erfüllen.

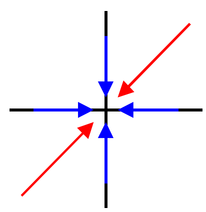
Beispiel:

1.) $f(z) := z^2$ stetig, denn sei $w := z + \delta$

$(z+\delta)^2 = z^2 + 2\,z\,\delta + \delta^2 \to z^2$ für $\delta \to 0$

2.) $f(z) := \left\{ \begin{array}{c} \frac{\text{Re } z \cdot \text{Im } z}{|z|^2} \text{ für z} \neq 0 \\ 0 \text{ für } z = 0 \end{array} \right\}$

Behauptung: f unstetig in $z = 0$:



Sei $z = x + i\,y$ und $x = y$:

$$\lim_{z \to 0} \frac{\text{Re } z \text{ Im } z}{|z|^2} = \frac{x\,y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}$$

Sei jetzt $z = x + i\,y$ mit $x = 0$ oder $y = 0$:

$$\lim_{z \to 0} \frac{0}{x^2 + y^2} = 0 \neq \frac{1}{2}$$

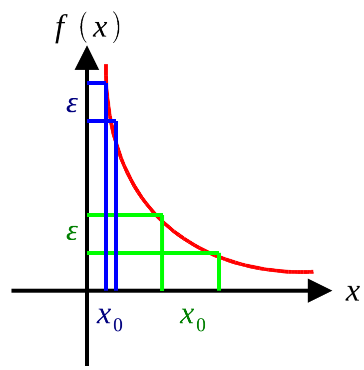
Bezeichnung: $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (stereographische Projektion)

Satz 9.4: Ist eine Funktion $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ auf einer kompakten Menge $K \subset \overline{\mathbb{C}}$ stetig (d.h. $f(z)$ ist stetig für alle $z \in K$), so ist sie dort gleichmäßig stetig.

Bedeutung „gleichmäßig stetig“: f stetig in z_0: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon, \cancel{z_0}) > 0$ mit $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. (Ohne das z_0 „gleichmäßig stetig“.)

Beispiel:

$f : (0, 1) \to \mathbb{R}$; $f(x) := \frac{1}{x}$



$g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig: Beweis wie Satz 9.4.

Beweisidee:

Voraussetzung: $f : K \to \overline{\mathbb{C}}$ ist stetig auf K, d.h. in allen $z \in K$.

D.h. für alle $z \in K$ existiert $\delta = \delta(\epsilon, z)$ mit

$$\underbrace{|w - z|}_{\text{offene Umgebung } U_\delta(z) \text{ von z}} < \delta \Rightarrow \ldots$$

Die $U_\delta(z)$ bilden eine offene Überdeckung von K.

K kompakt $\Rightarrow$ es existieren *endlich* viele davon, die K überdecken. Wähle das kleinste davon.

Differenzierbarkeit:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Definition 9.5: Eine Funktion f heißt im Punkt $z_0 \in G$ (G: Gebiet) **komplex differenzierbar** (kurz **differenzierbar**), wenn der Limes

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \Delta z \neq 0}} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

für $z_0 + \Delta z \in G$ existiert.

f heißt im Punkt z_0 **holomorph** oder **analytisch**, wenn es eine offene Umgebung

U von z_0 gibt, so dass $f(z)$ in allen $z \in U$ komplex differenzierbar ist.
f heißt **holomorph in einer Menge** $M \subset \mathbb{C}$, wenn sie in jedem Punkt von M holomorph ist.

WARNUNG!!! „Analytisch“ bedeutet im Reellen: in Potenzreihen entwickelbar. Dazu genügt es im Reellen nicht, dass die Funktion. in einer Umgebung differenzierbar ist.

Bemerkungen:

1.) *Damit f in einer Menge M holomorph ist, genügt nicht die komplexe Differenzierbarkeit in M. Denn ein holomorphes f muss auch in einer Umgebung des Randes von M definiert sein und dort differenzierbar sein, falls der Rand zu M gehört.*

2.) *Differenzierbarkeit: Ähnlich wie bei der Stetigkeit: In der Definition ist Δz eine beliebige komplexe Zahl. $\Rightarrow$ Man hat* alle *Grenzwerte zu allen „Wegen“ $z \to 0$ zu betrachten. Alle diese Grenzwerte müssen gleich sein.*
Sei $\Delta z = x + i y$; $x, y \in \mathbb{R}$, $u(z) = u(x+iy)$.
Betrachte zuerst $\Delta z := x$ und setze: $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$; u, v: reellwertig

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(z_0 + x) - f(z_0)}{x} = \lim \frac{u(x_0 + x, y_0) + i v(x_0 + x, y_0) - u(x_0, y_0) - i v(x_0, y_0)}{x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} =: f'(z_0)$$

Dieser Wert muss gleich sein mit:

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(z_0 + i y) - f(z_0)}{i y} = \frac{\partial u}{i \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = f'(z_0)$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} ; \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-\partial u}{\partial y} ;$$

Diese beiden Gleichungen heißen **Cauchy-Riemannsche DGLen**.

Satz 9.6: Ist eine Funktion $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ komplex differenzierbar, so existieren die 4 partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y},$$

und es bestehen die Cauchy-Riemannschen DGLen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} ; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\partial v}{\partial x} .$$

Beispiele:

1.) Die Funktion. f : $z \to \bar{z}$ ist *nicht* komplex differenzierbar, obwohl alle 4 partiellen Ableitungen existieren: $\bar{z} = x - i y$. Es gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \; ; \; \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-\partial y}{\partial y} = -1 \neq +1$$

2.) $f : z \to z \cdot \bar{z}$ ist im Punkt $z = 0$ komplex differenzierbar, jedoch nicht für $\bar{z} \neq 0$. Daher ist sie auch im Punkt $z = 0$ nicht holomorph.

$f(z) = z\,\bar{z} = (x + i\,y)(x - i\,y) = x^2 + y^2$, d.h. $u(x, y) = x^2 + y^2$, $v(x, y) = 0$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\,x \neq 0 \text{ für } x \neq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2\,y \neq 0 \text{ für } y \neq 0$$

Eine weitere Konsequenz aus den Cauchy-Riemannschen DGLen: Verwende die Variablen z, $\bar{z}$ statt x, y.

$$z = x + i\,y \; ; \; \bar{z} = x - i\,y$$

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \; ; \; y = \frac{1}{2\,i}(z - \bar{z})$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2} \; ; \; \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2\,i} \; ; \; \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \; ; \; \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{-1}{2\,i}$$

$$\mathrm{d}\,f(z, \bar{z}) = \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}\,z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,\mathrm{d}\,\bar{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\,z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\,\bar{z}$$

Setze $f = u + i\,v$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} + i\,\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

(mit Cauchy-Riemann)

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \,,$$

falls f die Cauchy-Riemannschen DGLen erfüllt. Notwendig und hinreichend!

Satz 9.7: Sei ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ gegeben, in dem f eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ ist. Wenn

1) $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ existieren mit $f = u + i\,v$ und $f = f(z) \; ; \; z = x + i\,y$,

2) diese Ableitungen stetig sind,

3) die Cauchy-Riemannsche DGLen erfüllt sind,

dann ist f holomorph in G.

***Bemerkung**: Dieser Satz ist nicht genau die Umkehrung von Satz 9.6, denn 9.6 beschreibt die komplexe Differenzierbarkeit in einem Punkt $z \in G$, Satz 9.7 die in G. Außerdem: Stetigkeit der Ableitungen in 9.7.*

Beweis: Seien $z, w \in G$, $z = x + i\,y$, $w = a + i\,b$.

$$f(z) - f(w) = [u(x, y) + i\,v(x, y)] - [u(a, b) - i\,v(a, b)] \;\; \Rightarrow$$

$$u(x, y) - u(a, b) = \left[\frac{\partial u(a, b)}{\partial x} + \alpha(x, y)\right](x - a) + \left[\frac{\partial u(a, b)}{\partial y} + \beta(x, y)\right](y - b)$$

$$v(x,y) - v(a,b) = \left[\frac{\partial v(a,b)}{\partial x} + \gamma(x,y)\right](x-a) + \left[\frac{\partial v(a,b)}{\partial y} + \delta(x,y)\right](y-b)$$

mit

$$\lim_{z\to w} \alpha(x,y) = \lim_{z\to w} \beta(x,y) = \lim_{z\to w} \gamma(x,y) = \lim_{z\to w} \delta(x,y) = 0 .$$

Dann folgt wegen

$$\frac{|x-a|}{|z-w|} \le 1 , \frac{|y-b|}{|z-w|} \le 1$$

$$\lim_{z\to w} \frac{\alpha(x-a)}{z-w} = 0 \text{ usw.}$$

$$f(z) - f(w) = \frac{\partial u}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial u}{\partial y}(y-b) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x-a) + i\frac{\partial v}{\partial y}(y-b) + o(z-w)$$

mit

$$o(z-w) : \lim_{z\to w} \frac{o(z-w)}{z-w} = 0 .$$

Cauchy-Riemannsche DGLen eingesetzt:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left[(x-a) + i(y-b)\right] + i\frac{\partial v}{\partial x}\left[(x-a) + i(y-b)\right] + o(z-w) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(z-w) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z-w) + o(z-w)$$

d.h. (1) $\lim_{z\to w} \frac{f(z) - f(w)}{z-w} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

analog:

(2) $\lim_{z\to w} \frac{f(z) - f(w)}{z-w} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)$

Damit ist

$$\lim_{z\to w}$$

für alle Grenzwertbildungen $z \to w$ gleich, d.h. f' existiert.
Stetigkeit der parziellen Ableitungen $\Rightarrow$ es existiert das totale Differenzial $\Rightarrow$ komplexe Differenzierbarkeit in allen $w \in G$.

Ist f zweimal stetig differenzierbar, so folgt aus den Cauchy-Riemannschen DGLen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}$$

und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ und analog } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 .$$

Satz 9.8: Eine in $G \in \mathbb{C}$ holomorphe Funktion erfüllt die Laplace-Gleichung
$\Delta f = 0 = \Delta u + i\,\Delta v$.

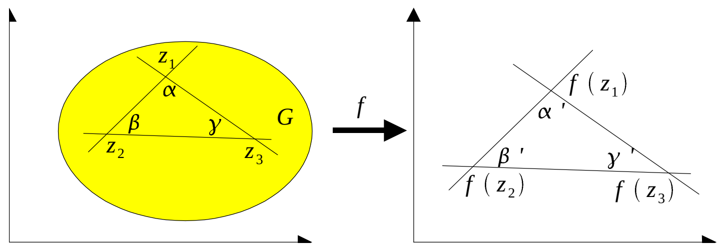
Es wird später gezeigt, dass jede holomorphe Funktion zweimal stetig differenzierbar ist.

Anwendungen: Elektrostatik im $\mathbb{R}^2$, Strömungslehre

2-dimensionales Potenzial $\phi = \mathrm{Re}\ f = u$
Umkehrung: Jede in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ definierte reelle Funktion $g(x, y)$ mit $\Delta g = 0$ ist *lokal* der Realteil einer holomorphen Funktion. f ist durch g bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

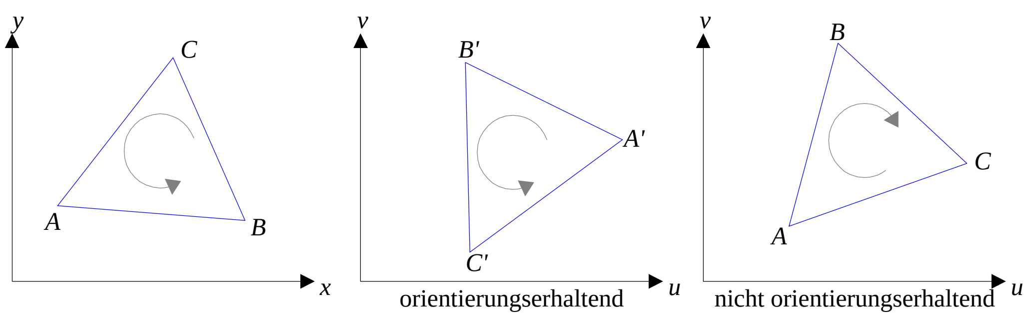
Satz 9.9: In einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ sind die holomorphen Funktionen mit $\partial f / \partial z \neq 0$ genau die winkeltreuen orientierungserhaltenden differenzierbaren (d.h. $\partial u / \partial x$, $\partial u / \partial y$, $\partial v / \partial x$, $\partial v / \partial y$ existieren und sind stetig) Abbildungen $f: G \to \mathbb{C}$.

„Winkeltreu": Seien in $\mathbb{C}$ drei Geraden gegeben, die sich in z_1, z_2, z_3 schneiden. Schnittwinkel: α, β, γ. Dann schneiden sich im Limes $\overline{z_1 z_2} \to 0$, $\overline{z_2 z_3} \to 0$, $\overline{z_3 z_1} \to 0$ auch die Seiten des Dreiecks $f(z_1), f(z_2), f(z_3)$ unter dem Winkeln α, β, γ.



f „orientierungserhaltend" $\Leftrightarrow$ $f = u + i\,v$ mit
$$\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} > 0$$

Anschaulich bedeutet das, dass ein Dreieck ABC seinen Umlaufsinn unter der Abbildung f beibehält:



Beweis: Man betrachtet wieder 3 Punkte z_0, $z_0 + \Delta_1 z$, $z_0 + \Delta_2 z \in G$, die hinreichend nahe beisammen liegen, so dass auch das Dreieck z_0, $z_0 + \Delta_1 z$, $z_0 + \Delta_2 z$ ganz in G liegt.

1) Ist f holomorph in G, so gilt:
$$f(z_0 + \Delta_1 z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot \Delta_1 z + A(z_0, \Delta_1 z)$$
$$f(z_0 + \Delta_2 z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot \Delta_2 z + B(z_0, \Delta_2 z)$$

Dabei:

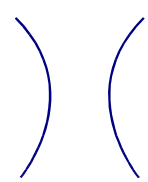
$$\lim_{\Delta_1 z \to 0} A(z_0, \Delta_1 z) = \lim_{\Delta_2 z \to 0} B(z_0, \Delta_2 z) = 0$$
$$\Rightarrow$$
$$\lim_{\Delta_1 z \to 0} f(z_0 + \Delta_1 z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot \Delta_1 z$$
$$\lim_{\Delta_2 z \to 0} f(z_0 + \Delta_2 z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot \Delta_2 z$$

In diesem Limes ist das Dreieck $f(z_0), f(z_0 + \Delta_1 z), f(z_0 + \Delta_2 z)$ ähnlich zum Dreieck $z_0, z_0 + \Delta_1 z, z_0 + \Delta_2 z$. Es ist gleich orientiert, da es aus $z_0, z_0 + \Delta_1 z, z_0 + \Delta_2 z$ durch eine Drehstreckung (Multiplikation mit $f'(z_0)$) hervorgeht $\Rightarrow$ $\alpha' = \alpha, \beta' = \beta, \gamma' = \gamma$.

2) Existieren
$$\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial y},$$
so lässt sich $\Delta_1 z := \Delta x$ und $\Delta_2 z := i \Delta y$ wählen. Speziell für $\Delta x = \Delta y$ (d.h. $\beta = \gamma$):
$$f(z_0 + \Delta_1 z) = f(z_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x + \text{Restglied}$$
$$f(z_0 + \Delta_2 z) = f(z_0) + \left(\frac{\partial u}{i \partial y} + \frac{i \partial v}{i \partial y} \right) i \Delta y + \text{Restglied}$$
Limes $\Delta x = \Delta y \to 0$.
Winkeltreu $\Rightarrow \alpha' = \alpha, \beta' = \beta, \gamma' = \gamma$

Zwei Zahlen stehen aufeinander senkrecht
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \text{ und } \left(\frac{\partial u}{i \partial y} + \frac{i \partial v}{i \partial y} \right) i,$$
wenn die Klammerausdrücke durch Multiplikation mit einem k auseinander hervorgehen.
k ist das Verhältnis der Seitenlängen $\overline{f(A) f(B)} : \overline{f(A) f(C)}$. Damit $\beta' = \gamma'$ gilt, muss $k = \pm 1$ sein; Orientierungserhaltung $\Rightarrow k = +1$.
Vergleich der Klammerausdrücke $\Rightarrow$ Cauchy-Riemannsche DGLen.

Beispiel: Berechne das elektrostatische Potenzial, das von einer gleichseitigen Hyperbel erzeugt wird, auf der ein Potenzial $\Phi \in \mathbb{R}$ liegt:



o.B.d.A.: Wähle Koordinaten so, dass die Gleichung der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ ist.

Aufgabe: Finde ein holomorphe Funktion f mit $\text{Re } f(z) = \Phi$ auf $x^2 - y^2 = 1$; $z = x + i y$;

Ansatz: $u \equiv \text{Re } f = \Phi(x^2 - y^2)$, denn
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Imaginärteil v von f: Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,;\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \Rightarrow -2\,\Phi_y \Rightarrow v = 2\,\Phi_{xy} + K_2$$

$$2\,\Phi_x = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \Phi_{xy} + K_1(x) \Rightarrow v = 2\,\Phi_{xy} + K$$

9.3 Integralsätze

Kurve k mit Koordinatendarstellung $t \to k(t) \in \mathbb{R}^2$ (d.h. wir betrachten Kurve im $\mathbb{R}^2$). k sei stückweise stetig differenzierbar. Sei ein Vektorfeld $a: x \in \mathbb{R}^2 \to a(x) \in \mathbb{R}^2$, a sei stetig.

$$\int_k a \cdot \mathrm{d}\,x \equiv \int_k \langle a, \mathrm{d}\,x \rangle := \int_c^d a\big(k(t)\big)\frac{\mathrm{d}\,k}{\mathrm{d}\,t}\cdot \mathrm{d}\,t$$

mit $k(c)$ = Anfangspunkt und $k(d)$ = Endpunkt

Definition 9.10: Für eine stückweise stetig differenzierbare Kurve k mit der Koordinatendarstellung $[a, b] \ni t \to k(t) \in \mathbb{C}$ und für eine auf k stetige Funktion $f(z) = u(z) + i\,v(z)$ definiert man:

$$\int_k f(z)\,\mathrm{d}\,z := \int_a^b f(k(t))\cdot k'(t)\,\mathrm{d}\,t$$

Ausgeschrieben mit $k(t) = x(t) + i\ y(t)$:

$$\int_k f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_a^b u(k(t))\cdot x'(t)\,\mathrm{d}\,t - \int_a^b v(k(t))\cdot y'(t)\,\mathrm{d}\,t + i\int_a^b u(k(t))\cdot y'($$

$$+ i\int_a^b v(k(t))\cdot x'(t)\,\mathrm{d}\,t\,.$$

Folgerungen:

1) Unter der Voraussetzung von 9.10 existiert das Integral immer.

2) Seien k und l stückweise stetig differenzierbare Wege:

$$\left.\begin{array}{l} k:[a, b] \ni t \to z(t) \\ l:[c, d] \ni t \to z(t) \end{array}\right\}\ z(b) = z(c)\,;$$

d.h. k und l hängen zusammen

$$\Rightarrow \int_{k+l} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_k f(z)\,\mathrm{d}\,z + \int_l f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

3) Substitutionsregel:

Eine Umgebung der Kurve k werde der Abbildung $g\colon z \to w(z) \in \mathbb{C}$ unterworfen, wobei g stetig komplex differenzierbar sei mit $(\mathrm{d}\,w(z))/(\mathrm{d}\,z) \neq 0$.

Dann gilt:

$$\int_g (k)\ f(w)\,\mathrm{d}\,w = \int_k f(w(z))\frac{\mathrm{d}\,w}{\mathrm{d}\,z}\,\mathrm{d}\,z$$

Beispiel:

1) $f(z) = \frac{1}{z}$; $k: z(t) = \cos t + i \sin t$ für $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\int_k f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t + i\cos t}{\cos t + i\sin t}\,\mathrm{d}t = 2\pi i$$

2) Seien $k : [a, b] \ni t \to z(t)$; $l: [-b, -a] \ni t \to \tilde{z}(t) := z(-t)$
$\tilde{z}$ durchläuft die Kurve k von b nach a. Übliche Bezeichnung $l = -k$.

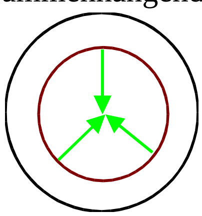
$$\int_l f(\tilde{z})\,\mathrm{d}\tilde{z} = \int_{-b}^{-a} f(z(-t'))\frac{\mathrm{d}z(-t')}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}t' = \int_b^a f(z(t))\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$$

Definition 9.11: Eine Menge $M \subset \mathbb{C}$ heißt **einfach zusammenhängend**, wenn gilt:

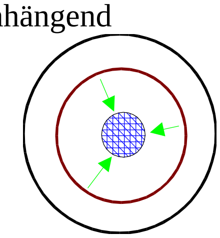
1) M ist zusammenhängend
2) Zu jeder geschlossenen Kurve $k : [a, b] \to k \subset M$ $t \to z(t)$ gibt es eine stetige Abbildung $[0,1] \times [a, b] \to M : (h, t) \to z(h, t)$, so dass $z(0, t) = z(t)$ die Kurve k ist und $z(1, t) = z_0 \in M$ ein einziger Punkt ist für alle $t \in [a, b]$.
Man nennt dann die Kurve k **homotop** zum Punkt z_0.
Anschaulich: *Jede* geschlossene Kurve, die ganz in M liegt, lässt sich stetig auf einen Punkt zusammenziehen, ohne M zu verlassen.
Parameter der Deformation: $h \in [0, 1]$

Beispiele:

1) $\mathbb{R}^n$ und **Kreisscheibe** sind einfach zusammenhängend



2) **Kreisring** ist *nicht* einfach zusammenhängend



3) **Unterbrochener Kreisring** ist einfach zusammenhängend

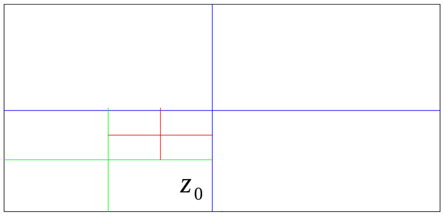
Satz 9.12 (Cauchyscher Integralsatz): Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet; die Funktion f sei holomorph in G. Dann gilt:

$$\int_k f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

für jede geschlossene Kurve k in G.

Beweis:

1) Integrationstheorie $\Rightarrow$ die von k eingeschlossene Fläche lässt sich beliebig genau durch eine Summe von achsenparallelen Rechtecken approximieren, die innerhalb von k liegen.



R

$$\Rightarrow \int_k f(z)\,\mathrm{d}z$$

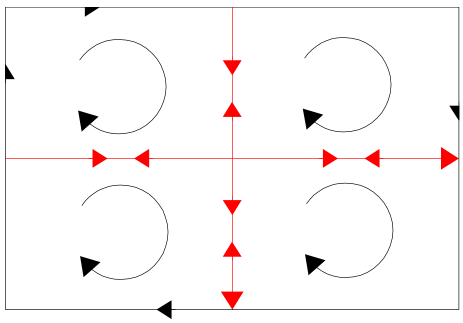
lässt sich durch

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{R_i} f(z)\,\mathrm{d}z$$

annähern, da sich die Beiträge von aneinander stoßenden Rechteckseiten gegenseitig wegheben. Also genügt es, den Satz für ein Rechteck zu zeigen.

2) Man definiert

$$\int_R f(z)\,\mathrm{d}z =: \alpha(R)$$



R

Halbiere die Seiten von R, so dass vier gleiche Rechtecke entstehen.

$$\int_R f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{4} \int_{R_i} f(z)\,\mathrm{d}z =: \sum_{i=1}^{4} \alpha(R_i)\,.$$

$$\int_R f(z)\,\mathrm{d}z =: \alpha(R) = \sum_{i=1}^{4} \int_{R_i} f(z)\,\mathrm{d}z =: \sum_{i=1}^{4} \alpha(R_i)$$

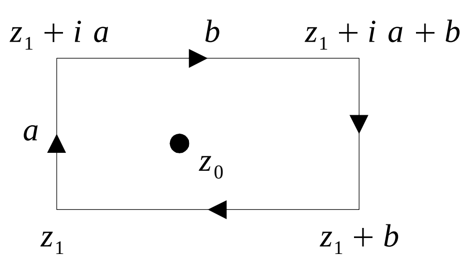
Es kann *nicht* für alle 4 Rechtecke R_i , $i = 1$, … , 4 gelten:
$$\left|\alpha\left(R_i\right)\right| < \frac{\left|\alpha\left(R\right)\right|}{4} ,$$

d.h. es existiert ein R_i (dieses sei mit $R^{(1)}$ bezeichnet) mit
$$\left|\alpha\left(R^{(1)}\right)\right| \geq \frac{1}{4}\left|\alpha\left(R\right)\right| .$$

Zerlege $R^{(1)}$ wieder in 4 gleiche Teile, daraus wählt man ein $R^{(2)}$ mit
$$\left|\alpha\left(R^{(2)}\right)\right| \geq \frac{1}{4\cdot 4}\left|\alpha\left(R\right)\right| .$$

Nach k Schritten:
$$\left|\int\limits_{R^{(k)}} f\left(z\right) \mathrm{d}\, z\right| \geq \frac{1}{4^k}\left|\alpha\left(R\right)\right| \quad (*)$$

Jedes der Rechtecke, die (*) erfüllen, liegt ganz in allen vorausgehenden Rechtecken $R^{(i)}$. Die Seitenlänge dieser Rechtecke $R^{(k)}$ konvergiert gegen 0. Also gibt es genau einen Punkt z_0 , der in allen Rechtecken $R^{(k)}$ für beliebige k liegt. Wegen $z_0 \in G$ ist $f\left(z\right)$ in z_0 holomorph, und es gilt:
$$f\left(z\right) = f\left(z_0\right) + f'\left(z_0\right)\left(z - z_0\right) + \varepsilon\left(z\right)\left(z - z_0\right)$$
mit
$$\lim_{z \to z_0} \varepsilon\left(z\right) = 0 ,$$
also:
$$\int\limits_{R^{(k)}} f\left(z\right) \mathrm{d}\, z = f\left(z_0\right)\int\limits_{R^{(k)}} \mathrm{d}\, z + f'\left(z_0\right)\int\limits_{R^{(k)}}\left(z - z_0\right) \mathrm{d}\, z + \int\limits_{R^{(k)}} \varepsilon\left(z\right)\left(z - z_0\right) \mathrm{d}\, z \quad (**)$$



Da $R^{(k)}$ achsenparallel ist, gilt:
$$\int\limits_{R^{(k)}} \mathrm{d}\, z = \int\limits_0^a i\, \mathrm{d}\, t + \int\limits_0^b \mathrm{d}\, t + \int\limits_a^0 i\, \mathrm{d}\, t + \int\limits_b^0 \mathrm{d}\, t = 0 .$$

2. Integral in (**):
$$\int\limits_{R^{(k)}}\left(z - z_0\right) \mathrm{d}\, z = \int\limits_0^a\left(\underbrace{z_1 + i\, t}_{z} - z_0\right) i\, \mathrm{d}\, t + \int\limits_0^b\left(z_1 + i\, a + t - z_0\right) \mathrm{d}\, t +$$
$$+ \int\limits_a^0\left(z_1 + i\, t + b - z_0\right) i\, \mathrm{d}\, t + \int\limits_b^0\left(z_1 + t - z_0\right) \mathrm{d}\, t = \int\limits_0^b i\, a\, \mathrm{d}\, t + \int\limits_a^0 b\, i\, \mathrm{d}\, t = i\, a\, b - b\, i\, a = 0$$

3. Integral in (**):
$$\left|\int\limits_{R^{(k)}} g\left(z\right) \mathrm{d}\, z\right| \leq l \cdot \max_{z \in R^{(k)}}\left|g\left(z\right)\right|$$
l : Länge des Integrationswegs

Auf $R^{(k)}$ nimmt $|\varepsilon(z)|$ ein Maximum ε_m an. Ist die Seitenlänge des Rechtecks R gleich A bzw. B, so ist die von $R^{(k)}$: $A/2^k$ bzw. $B/2^k$. Außerdem gilt auf $R^{(k)}$:

$$|z-z_0| \le \frac{1}{2^k}(A+B) \Rightarrow$$

Damit erhält man:

$$\left|\int_{R^{(k)}} \varepsilon(z)(z-z_0)\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{2}{2^k}(A+B)\left[\varepsilon_m \frac{1}{2^k}(A+B)\right] = 2(A+B)^2 \cdot \varepsilon_m \frac{1}{4^k}$$

Einsetzen in (*) $\Rightarrow$

$$2(A+B)^2\,\varepsilon_m \ge |\alpha(R)|$$

Wegen

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_m = 0$$

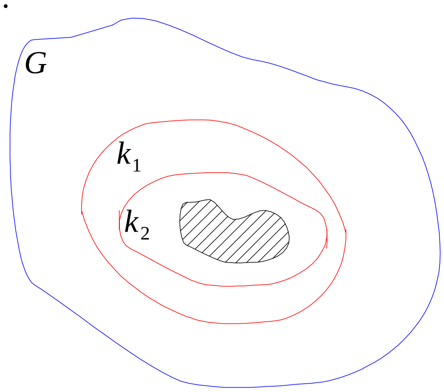
folgt $\alpha(R) = 0$.

Folgerungen:

1.) Seien zwei stückweise stetig differenzierbare, geschlossene, doppelpunktfreie Kurven k_1 und k_2 gegeben, wobei k_2 ganz im Inneren von k_1 liegt. Die Funktion f sei holomorph in einem Gebiet G, das das Ringgebiet zwischen k_1 und k_2 enthält. Dann gilt:

$$\int_{k_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{k_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

für gleich orientiertes k_1, k_2.



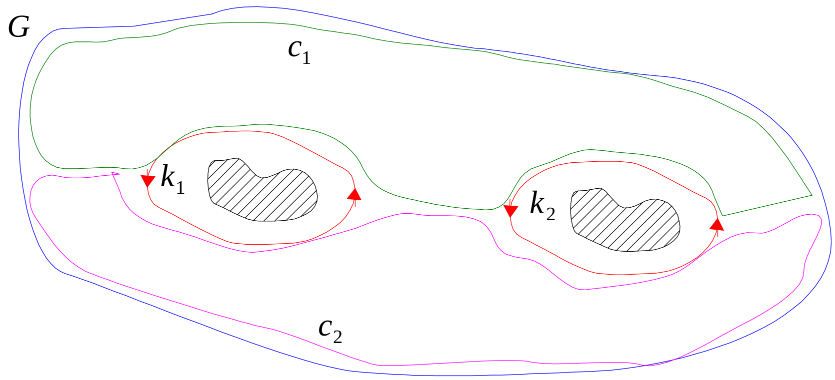
c_1, c_2 liegen in einem Gebiet, in dem f holomorph ist $\Rightarrow$

$$\int_{c_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{c_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{c_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{c_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{k_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{k_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Man sagt: k_1 und k_2 lassen sich in G **stetig ineinander transformieren**, oder k_1 und k_2 sind (bezüglich G) **homotop**.

2.)



Sei k ein geschlossener, doppelpunktfreier, stückweise stetig differenzierbarer Weg und $k_1, \ldots, k_n$ ebenfalls geschlossen und doppelpunktfrei, wobei alle k_i im Innengebiet von k und jedes k_i im Außengebiet der anderen k_j liegt. $k, k_1, \ldots, k_n$ seien gleich orientiert.
Die Funktion f sei holomorph in einem Gebiet G, das das Ringgebiet zwischen k und allen k_i enthält. Dann gilt:

$$\int_k f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \int_{k_i} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

3.) Ist f in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G holomorph, so definiert man für ein festes $z_0 \in G$:

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z \qquad z \in G$$

eine eindeutig bestimmte holomorphe Funktion F mit $F'(z) = f(z)$.

Beweis: Existenz und Eindeutigkeit wegen des Satzes von Cauchy.

Für $z, z_1 \in G$ gilt:

$$F(z) - F(z_1) = \int_{z_1}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z$$

und $f(z) = f(z_1) + \varepsilon(z)$.
Also:

$$F(z) - F(z_1) = f(z_1)(z - z_1) + \int_{z_1}^{z} \varepsilon(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\left| \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1) \right| \le |\varepsilon_{max}|$$

Für $z \to z_1$ strebt $\varepsilon(z)$ gegen Null, also auch ε_{max}:

$$\lim_{z \to z_1} \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} = f(z)$$

Satz 9.13 (Cauchysche Integralformel): f sei in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G holomorph; $k \subset G$ sei eine geschlossene doppelpunktfreie (stückweise stetig differenzierbare) positiv orientierte Kurve, z liege im Inneren von k. Dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w.$$

Andere Formulierung: Die Funktion sei holomorph in einem Gebiet G. $k \subset G$ sei eine geschlossene doppelpunktfreie (stückweise stetig differenzierbare) positiv orientierte Kurve. z liege im Inneren von k. k sei homotop zu einem Punkt $z_1 \in G$. Dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{w-z} \, \mathrm{d} w .$$

***Bemerkung**:*

$$f(z) = \int_k \frac{f(w)}{w-z} \, \mathrm{d} w$$

1) Liegt $z \in G$ außerhalb von k, so ist der Integrand holomorph im Inneren von k. Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt dann:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_k \frac{f(w)}{w-z} \, \mathrm{d} w = 0 .$$

2) Der Satz drückt $f(z)$ durch die Werte von f auf einer Kurve um z aus. So etwas ist für C^∞-Funktionen nicht *möglich.*
(Beispiel: $\exp(-1/x^2)$ lässt sich nicht als Reihe entwickeln)

Beweis: Es gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_k \frac{f(w)}{w-z} \, \mathrm{d} w = \frac{1}{2\pi i} \int_k \frac{f(z)}{w-z} \, \mathrm{d} w + \frac{1}{2\pi i} \int_k \frac{f(w)-f(z)}{w-z} \, \mathrm{d} w = 0 .$$

1. Integral:

$$\frac{f(z)}{2\pi i} \int_k \frac{1}{w-z} \, \mathrm{d} w = \frac{f(z)}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\varrho e^{i\varphi}}{\varrho e^{i\varphi}} i \, \mathrm{d} \varphi = f(z)$$

denn: Deformiere k zu einem Kreis um z mit Radius ϱ:

$$w = z + \varrho e^{i\varphi} , \quad \frac{\mathrm{d} w}{\mathrm{d} t} = \varrho e^{i\varphi} i \varphi' ;$$

Wähle im 2. Integral ϱ so klein, dass für $\varepsilon > 0$ gilt:

$$|f(w) - f(z)| \le \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{2\pi i} \int_k \frac{f(w)-f(z)}{w-z} \, \mathrm{d} w \right| \le \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{\varrho} 2\pi\varrho = \varepsilon .$$

Da $\varepsilon > 0$ willkürlich ist, folgt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_k \frac{f(w)-f(z)}{w-z} \, \mathrm{d} w = 0 .$$

Satz (letztes Semester): „Wenn die reelle Funktion $g(x, y)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ im abgeschlossenen Rechteck $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ eine *stetige* Ableitung nach x besitzt, gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} x} \int_c^d g(x, y) \, \mathrm{d} y = \int_c^d \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} x} g(x, y) \, \mathrm{d} y .\text{“}$$

Wende diesen Satz auf den Real- und Imaginärteil von komplexen Funktionen an $\Rightarrow$ er gilt auch für komplexe Funktionen.

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_k \frac{f(w)}{(w-z)^2} \, \mathrm{d} w$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_k \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} \, \mathrm{d} w$$

Also: $f^{(n)}$ wird dargestellt durch ein Integral über f. Dieses existiert für holomorphe Funktionen immer. $\Rightarrow$

Satz 9.14: Ist f in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorph, so ist f in G beliebig oft differenzierbar. Die Ableitungen sind ebenfalls holomorph.

Satz 9.15 (Satz von Morera): Sei f in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ stetig. Für *jeden* geschlossenen Weg k in G sei

$$\int_k f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Dann ist f in g holomorph.

***Bemerkung**: Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes*

Beweis: Folgerung 3 zum Cauchyschen Integralsatz 9.12: Dort wird benötigt, dass

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)\,\mathrm{d}w$$

wegunabhängig ist. Offensichtlich gilt: $F'(z) = f(z)$ für *alle* $z \in G$. Also ist F holomorph und damit auch alle Ableitungen nach 9.14, insbesondere f.

Satz 9.16 (Cauchy-Hadamardscher Satz): Zu der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \qquad a_k, z \in \mathbb{C}$$

definiert man:

$$\mu := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

Für $|z| < 1/\mu$ ist die Reihe absolut konvergent, für $|z| > 1/\mu$ ist sie divergent (Wurzelkriterium).

$r := 1/\mu$ heißt **Konvergenzradius** der Reihe.

***Bemerkungen**:*

1.) *Nach den Vereinbarungen am Beginn des Kapitels ist $\infty \in \bar{\mathbb{C}}$. Setze $1/\infty := 0$ und $1/0 := \infty$.*

2.) *Der Satz macht keine Aussage über die Punkte auf dem Rand $|z| = 1/\mu$ des Konvergenzkreises. Hier muss jede Reihe für sich untersucht werden; z.B. divergiert*

$$\sum_n z^n$$

in allen z mit $|z| = 1$. Andererseits divergiert

$$\sum_n \frac{1}{n},$$

aber

$$\sum_n (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2$$

konvergiert.
Also konvergiert die Reihe

$$\sum_n \frac{z^n}{n}$$

in einigen Randpunkten, aber nicht in allen.

3.) *Gewöhnlich hat man es mit Reihen der Form*

$$\sum_k a_k \,(z - z_0)^k$$

zu tun. Wende den Satz sinngemäß an.

Beweis:

1.) Wurzelkriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \qquad b_k \in \mathbb{C}$$

konvergiert, falls

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|b_k|} < 1 \,.$$

Setze $b_k := a_k \, z^k \Rightarrow$

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|b_k|} = |z| \cdot \mu < 1 \text{ für } |z| < \frac{1}{\mu} \,.$$

Aussage über die Divergenz folgt ebenfalls aus dem Wurzelkriterium.

2.) Der Fall

$$\mu = 0 = \overline{\lim_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = 0 = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

heißt:

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; \underset{n \in \mathbb{N}}{\exists} \; \sqrt[k]{|a_k|} < \varepsilon \text{ für } k \geq n \,.$$

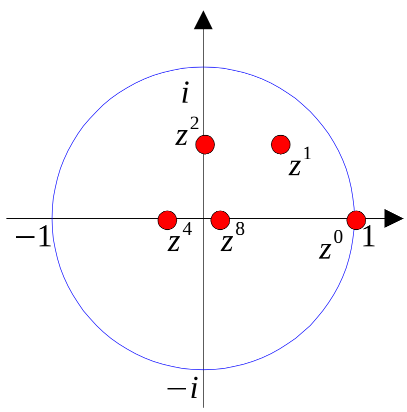
Für ein beliebiges $z \in \mathbb{C}$ wähle $\varepsilon := 1/(2\,|z|)$. Für $k > n$ ist dann $\sqrt[k]{|a_k \, z^k|} < 1/2$, also auch

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|a_k \, z^k|} < \frac{1}{2} < 1 \,.$$

Beispiel:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

Wähle $z = 1/2 + i/2$ (innerhalb des Konvergenzradius), $z^2 = 1/4\;2\;i$, $z^4 = -1/4$, $z^8 = 1/16$.



Satz 9.17: Eine Potenzreihe konvergiert gleichmäßig in jedem zum Konvergenzkreis konzentrischen kleineren Kreis.

Beweis: Der Radius des Konvergenzkreises von

$$\sum_k a_k\ z^k$$

sei $r \equiv 1/n$. Wähle eine Zahl ϱ und $0 < \varrho < r$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq \varrho$. Dann ist

$$\sum_k |a_k|\ \varrho^k$$

konvergent, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{n+1}|\ \varrho^{n+1} + \ldots + |a_{n+p}|\ \varrho^{n+p} < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ und alle $p \geq 1$ $\Rightarrow$

$$|a_{n+1}\ z^{n+1} + \ldots + a_{n+p}\ z^{n+p}| \leq |a_{n+1}|\ |z^{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}|\ |z^{n+p}| \leq |a_{n+1}|\ \varrho^{n+1} + \ldots + |a_{n+p}|\ \varrho^n$$

.

Dies gilt für *alle* z mit $|z| \leq \varrho$.

Satz 9.18: Die Funktionen $f_0, f_1, \ldots$ seien in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G holomorph und die Reihe

$$\sum_k f_k(z)$$

sei auf jeder kompakten Teilmenge G' von G gleichmäßig konvergent.
Dann ist

$$f(z) = \sum_k f_k(z)$$

in G holomorph und es gilt:

$$f^{(p)}(z) = \sum_k f_k^{(p)}(z)$$

Diese Reihe ist konvergent in G und gleichmäßig konvergent in jeder kompakten Teilmenge von G.

Beweis: In 3 Schritten:

1.) **Behauptung**: f ist stetig in G.
Sei ein $z_0 \in G$ und ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle eine abgeschlossene Menge G' mit $z_0 \in G' \subset G$ (o.B.d.A.: G' beschränkt $\Rightarrow$ kompakt). Dann ist $f(z)$ in G' gleichmäßig konvergent, d.h.:

$$\underset{N \in \mathbb{N}}{\exists}\ \underset{z \in G'}{\forall} \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} f_k(z)\right| < \varepsilon\ .$$

Da die f_k stetig sind, ist es auch die endliche Summe

$$\sum_{k=0}^{N} f_k(z)\ .$$

Daher existiert eine Umgebung $U \subset G'$ von z_0 mit

$$\underset{z \in U}{\forall} \left|\sum_{k=0}^{N} f_k(z) - \sum_{k=0}^{n} f_k(z_0)\right| < \varepsilon$$

In U gilt also:

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \left|\sum_{k=0}^{N} f_k(z) - \sum_{k=0}^{N} f_k(z_0)\right| + \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} f_k(z)\right| + \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} f_k(z_0)\right| \leq 3\ \varepsilon$$

2.) **Behauptung**: Es gilt:

$$\int_k f(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_l \int_k f_l(z)\,\mathrm{d}\,z$$

für Kurven $k \subset G$. Diese Reihe konvergiert in G (k hat die endliche Länge L .

Beweis: Wegen der 1. Behauptung existiert

$$\int_k f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

Da die Kurve k definitionsgemäß eine abgeschlossene Menge ist, konvergiert

$$\sum_l f_l(z)$$

auf k gleichmäßig. Für $\varepsilon > 0$ existiert also ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{z \in k} \left| \sum_{l=N+1}^{\infty} f_l(z) \right| < \varepsilon$$

und

$$\int_k f(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_{l=0}^{N} \int_k f_l(z)\,\mathrm{d}\,z + \int_k \sum_{l=N+1}^{\infty} f_l(z)\,\mathrm{d}\,z$$

$$\left| \int_k f(z)\,\mathrm{d}\,z - \sum_{l=0}^{N} \int_k f_l(z)\,\mathrm{d}\,z \right| = \left| \int_k \sum_{N+1}^{\infty} f_l(z)\,\mathrm{d}\,z \right| < \varepsilon \cdot L \,.$$

Beachte, dass für dieses Ergebnis G *nicht* einfach zusammenhängend sein muss.

3.) **Beweis von 9.18**:

a) Wähle ein $z_0 \in G$. 2. Behauptung $\Rightarrow$

$$\int_k f(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_l \int_k f_l(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_l 0 = 0$$

für *geschlossene* Wege k in G , da alle f_l in G holomorph sind. Nach dem Satz von Morera (9.15) ist $f(z)$ in G regulär.

b) Sei k jetzt so, dass z_0 im Inneren von k liegt. Der Beweis zu 9.14 liefert:

$$f^{(p)}(z_0) = \frac{p!}{2\,\pi\,i} \int_k \frac{f(w)}{(w-z)^{p+1}}\,\mathrm{d}\,w = \sum_l \frac{p!}{2\,\pi\,i} \int_k \frac{f_l(w)}{(w-z_0)^{p+1}}\,\mathrm{d}\,w = \sum_l f_l^{(p)}(z_0)$$

(2. Behauptung für $\dfrac{f(w)}{(w-z_0)^{p+1}}$)

c) Seien $K \subset G$ eine kompakte Menge und $k \subset G$ eine geschlossene Kurve. K liege ganz im Inneren von k .
Satz von Weierstraß: Es existiert ein minimaler Abstand $\zeta > 0$ zwischen jedem $z \in K$ und der Kurve k (k und K sind abgeschlossen!). Sei $z \in K$ ein Punkt im Inneren von k . Da K kompakt ist, konvergiert

$$\sum_l f_l(z)$$

gleichmäßig:

$$\left| \sum_{l=N+1}^{N+r} f_l^{(p)}(z) \right| = \left| \frac{p!}{2\,\pi\,i} \int_k \frac{f_l(w)}{(w-z)^{p+1}}\,\mathrm{d}\,w \right| < \frac{p!}{2\,\pi} \frac{L\,\varepsilon}{\zeta^{p+1}}$$

Wenn N so gewählt ist, dass

$$\left| \sum_{N+1}^{N+r} f_l(w) \right| < \varepsilon$$

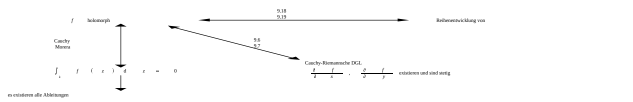
für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt. Damit ist die gleichmäßige Konvergenz auf K gezeigt.

Korollar: Eine Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

ist im Inneren des Konvergenzkreises holomorph; dort darf sie gliedweise differenziert und integriert werden.

Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, sei f stetig in G und sei k eine geschlossene Kurve in G.



„Es gibt einfach zusammenhängende Mengen, die nicht zusammenhängend sind.“

9.5 Analytische Funktionen

f heißt **analytisch** in $M \subset \mathbb{C}$, wenn sie sich in jedem $z_0 \in M$ in eine Potenzreihe entwickeln lässt. Wir wissen, dass alle analytischen Funktionen holomorph sind. Aber gilt die Umkehrung?

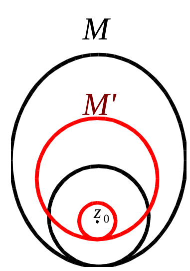
Satz 9.19: Die Funktion f sei in der offenen Menge $M \subset \mathbb{C}$ holomorph. Ist z_0 ein Punkt von M, so gilt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (*)$$

mit

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) .$$

Der Konvergenzradius der Reihe (*) enthält den größten Kreis um z_0, der ganz in M liegt. Er ist jedoch möglicherweise größer, da über M nichts weiter vorausgesetzt wird.



Beweis: Der Radius des größten Kreises um z_0, der ganz in M liegt, werde mit r bezeichnet. Wir zeigen, dass $\sum a_n (z - z_0)^n$ für $|z - z_0| < r$ konvergiert. Sei $|z - z_0| = \varrho$. Dann existiert ein ϱ_1 mit $\varrho < \varrho_1 < r$. Wähle ein $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta - z_0| = \varrho_1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \, \frac{1}{1 - (z - z_0)/(\zeta - z_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

Diese geometrische Reihe konvergiert wegen

$$\frac{|z-z_0|}{|\zeta-z_0|}=\frac{\varrho}{\varrho_1}<1\ .$$

Die Menge $\{z \,\|z-z_0| \le \varrho_1\}$ ist kompakt.

Jede auf einer kompakten Menge konvergente Folge konvergiert dort gleichmäßig. Also konvergiert unsere Reihe in z und ζ gleichmäßig.

Da f holomorph ist, ist es auf dieser Kreisscheibe beschränkt. Also ist mit

$\frac{1}{\zeta-z}$ auch $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$

gleichmäßig konvergent und darf gliedweise integriert werden.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z|=\varrho_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\,d\zeta=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(z_0)\frac{1}{n!}(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

***Also**: Für komplexe Funktionen ist „analytisch“ und „holomorph“ gleichbedeutend.*

Satz 9.20: Haben die beiden Potenzreihen

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

und

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$$

einen positiven Konvergenzradius und gilt:

- $f(z)=g(z)$ in einer Umgebung von z_0 *oder*
- $f(z)=g(z)$ für abzählbar unendlich viele Punkte $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, die z_0 als Häufungspunkt besitzen ($z_i\neq z_0$),

so sind beide Potenzreihen identisch.

Beweis: Zu zeigen: $a_n=b_n$. Dazu: Induktion nach n .

1.) Induktionsanfang: $n=0$: Wähle Punkte z_k aus $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty}z_k=z_0$.

Wegen
$$\lim_{k\to\infty}f(z_k)=\lim_{k\to\infty}g(z_k)$$
und wegen
$$f(z_0)=\lim_{k\to\infty}f(z_k)\ ,\ g(z_0)=\lim_{k\to\infty}g(z_k)$$
(gleichmäßige Konvergenz von Potenzreihen im Inneren des Konvergenzradius, Satz 9.17)
und wegen $f(z_k)=g(z_k)$ folgt $f(z_0)=g(z_0)$, und daraus $a_0=b_0$.

2.) Sei $a_i=b_i$ für $i\le m$. Wie oben wählt man Punkte z_k mit:
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z_k-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z_k-z_0)^n\ .$$

Wegen $z_k\neq z_0$ kann man durch $(z_k-z_0)^{m+1}$ kürzen.

Wegen $a_i=b_i$ für $i\le m$ entsteht:

$a_{m+1} + a_{m+2}(z_k - z_0) + \ldots = b_{m+1} + b_{m+2}(z_k - z_0) + \ldots$.
Im Limes $z_k \to z_0$ folgt $a_{m+1} = b_{m+1}$.

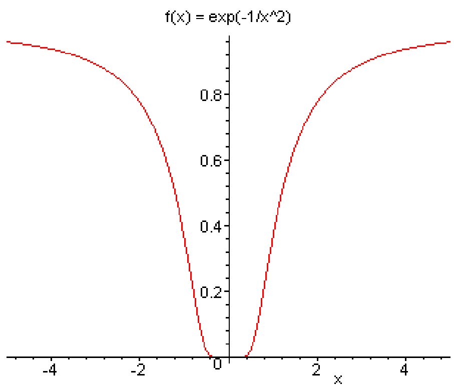
***Bemerkung**: Satz 9.20 gilt auch für reelle Funktionen, während Satz 9.19 nur für komplexe Funktionen gilt. Gegenbeispiel:* e^{-1/x^2} .

$$f'(x) = \frac{2\, e^{-1/x^2}}{x^3}\ ;\ \ f''(x) = \frac{4\, e^{-1/x^2}}{x^6} - \frac{6\, e^{-1/x^2}}{x^4}\ ;$$

L'Hospital:

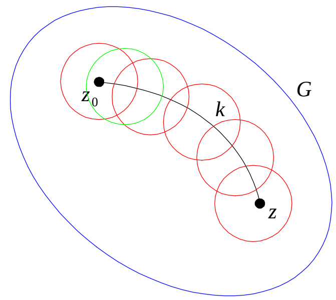
$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim 2\,\frac{1/x^3}{e^{1/x^2}} = 3\lim_{x\to 0}\frac{1/x^4}{1/x^3\, e^{1/x^2}} = 3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{e^{1/x^2}} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1/x^2}{1/x^3\, e^{1/x^2}} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0} x\cdot e^{-1/x^2} = 0$$
.

Analog für f'' , f''' .



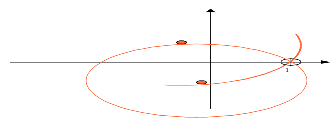
Satz 9.21 (Identitätssatz für analytische Funktionen): Seien zwei Funktionen f und g in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorph. Ferner gelte für eine Punktmenge $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$,
die einen Punkt $z_0 \in G$ als Häufungspunkt besitzt, $f(z_i) = g(z_i)$.
Dann gilt: $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$.

Beweis: Sei $z \in G$ beliebig. Zu zeigen: $f(z) = g(z)$. Verbinde z und z_0 durch eine Kurve k , die in G liegt. Möglich, da G als Gebiet zusammenhängend ist. Wegen der Offenheit von G enthält k keinen Randpunkt von G . Also existiert ein $\varrho > 0$, so dass jeder Punkt von k einen Abstand $> \varrho$ vom Rand von G besitzt. Schlage um z_0 einen Kreis K_0 mit Radius ϱ . Satz 9.20 $\Rightarrow$ $f(z^*) = g(z^*)$ für alle $z^* \in K_0$. Teile die Kurve k durch die Punkte $z_0, z_1, \ldots, z_m = z$ in Teilstücke mit einer Länge $\tilde{\varrho} < \varrho$. Schlage um jedes z_i einen Kreis K_i mit Radius ϱ .
Wegen $\tilde{\varrho} < \varrho$ ist z_{i+1} in K_i enthalten. Gilt daher $f(z) = g(z)$ in K_i , dann auch in einer Umgebung von z_{i+1} und somit in K_{i+1} .



Prinzip der analytischen Fortsetzung

$$\frac{1}{1-z}$$



Sei eine Potenzreihe $\sum a_n (z - z_0)^n$ gegeben, die einen Konvergenzradius $r < a$ besitzt. Wir nehmen an, dass es mindestens einen Punkt z_1 auf dem Rand gibt, der eine Umgebung U_1 besitzt, in der f holomorph ist. Dann lässt sich ein Kreis K_1 um z_1 bestimmen, der ganz im Holomorphiegebiet von f liegt, aber über den ursprünglichen Konvergenzkreis hinaus ragt.
Man sagt, f wurde **analytisch fortgesetzt**. Oft lässt sich f noch über K_1 hinaus in einen zweiten Kreis K_2 fortsetzen usw.

Beispiel:

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (geometrische Reihe, $f(z) = \frac{1}{1-z}$)

Konvergenzradius = 1. Zweite Reihenentwicklung um $z = i$:

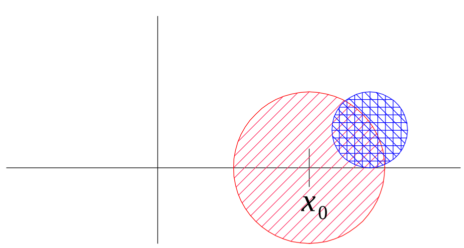
$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-i-(z-i)} = \frac{1}{1-i}\,\frac{1}{1-(z-i)/(1-i)} = \frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n$$

Konvergenzradius:

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{1-i}\right|^n} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow r = |1-i| = \sqrt{2}\,.$$

9.6 Holomorphe Ergänzung reeller Funktionen



Beispiel:

1.) $g(x) = e^x$

Potenzreihe:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ holomorphe Fortsetzung in $\mathbb{C}$: $x \to z$:

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad z \in \mathbb{C}$$

Konvergenz auf dem ganzen $\mathbb{C}$.

Analog:

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!} = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

$$\cosh z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right)$$

$$\sinh z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right)$$

Es folgt:

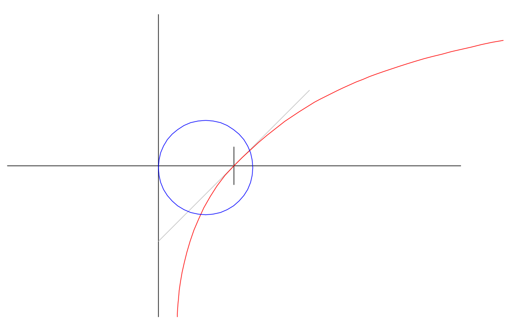
$\cosh iz = \cos z$

$1/i \sinh iz = \sin z$

$$e^z = e^{z - z_0 + z_0} = e^{z_0} e^{z - z_0} = e^{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{n!}$$

2.) $g(x) = \ln x$

$$\ln x = \ln(x_0 + (x - x_0)) = \ln x_0 + \ln\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right) = \ln x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\, x_0^n} (x - x_0)^n$$



Konvergenzradius nach Cauchy-Hadamard:

$$\frac{1}{r} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n \cdot x_0^n}} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0}$$

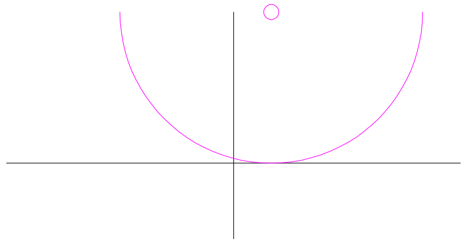
Für $x_0 \to \infty$ erhält man Konvergenz auf der ganzen rechten Halbebene.

Also: Definiere $\ln z$ durch

$$\ln z = \ln x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\, x_0^n} (z - x_0)^n$$

2. Methode: Definiere $\ln z$ durch:

$$\ln z := \int_1^z \frac{\mathrm{d}\, w}{w} \quad (*)$$

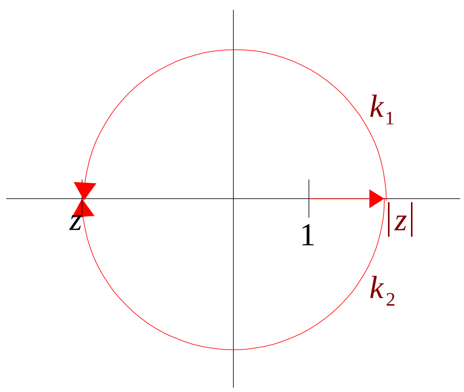


Für $\operatorname{Re} z > 0$ stimmt diese Definition mit der 1. überein.

> **Beweis**: Auf der reellen Achse (mit $x > 0$) stimmen beide Funktionen überein. Beide Funktionen sind in Reihen entwickelbar. Identitätssatz für Potenzreihen $\Rightarrow$ Behauptung.

Integrand von (*) ist für alle $w \neq 0$ holomorph $\Rightarrow$ (*) definiert $\ln z$ überall, solange der Integrationsweg durch 0 geht.
Aber: Der Cauchysche Integralsatz gilt hier *nicht* (Definitionsbereich ist nicht einfach zusammenhängend).
1. Lösung: ein Schnitt von 0 bis $-\infty$.

[Grafik]



$$\int_{k_1} \frac{\mathrm{d}\, w}{w} = \int_1^{|z|} \frac{\mathrm{d}\, w}{w} + \int_{\text{Kreis } 1} \frac{\mathrm{d}\, w}{w} = \ln |z| + \int_0^{\pi} \frac{|z| + e^{i\varphi}\, i\, \mathrm{d}\, \varphi}{|z| \cdot e^{i\varphi}} = \ln |z| + i\, \pi$$

$$w = |z|\, e^{i\varphi}$$

$$\mathrm{d}\, w = |z|\, e^{i\varphi}\, i\, \mathrm{d}\, \varphi$$

Analog auf k_2:

$$\int_{k_2} \frac{\mathrm{d}\, w}{w} = \ln |z| - i\, \pi$$

Beim Überqueren des Schnitts ergibt sich ein Sprung von $\pm 2\pi i$.

3. Methode: $\ln x$ ist die Umkehrfunktion von e^x.

$w = |w|\, e^{i\varphi} = |w|\, e^{i(\varphi \pm 2\pi)} = |w|\, e^{i(\varphi + 2n\pi)} \qquad n \in \mathbb{Z}$

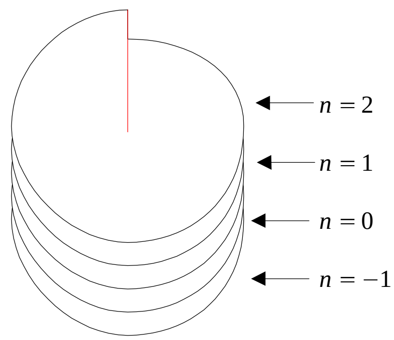
Umkehrfunktion von e^z:

$\ln w = z = \ln |w| + i \arg w + n \cdot 2\pi i$

($\arg w$: der Winkel der komplexen Zahl)

Für ein festes $n \in \mathbb{Z}$ ist $\ln w$ eindeutig. Man nennt die dadurch bestimmte Funktion den n-ten **Zweig des Logarithmus**. Der 0-te Zweig heißt **Hauptwert**. Konvention: $-\pi \le \arg w \le \pi$.

Lösung: Man nimmt als Definitionsbereich von $\ln w$ *nicht* die komplexe Ebene, sondern unendlich viele solche Ebenen. Wie eine Wendeltreppe oder ein aufgeschnittener Radi mit der Achse im Nullpunkt. Jedem n wird dabei ein Blatt des Rettichs zugeordnet.



Das gesamte Definitionsgebiet von $\ln z$, also die Gesamtheit dieser Ebenen, nennt man eine **Riemannsche Fläche**.

Definition: Eine **Riemannsche Fläche** F ist eine zusammenhängende Menge, in der gewisse Untermengen ausgezeichnet sind, die „offene Mengen" heißen.

(DEO (Durschnitt endlich vieler offener Mengen), VUO (Vereinigung unendlich vieler offener Mengen), die leere Menge $\emptyset$ und die Riemannsche Fläche F sind offen.)

Zu jedem $p \in F$ existiert eine Umgebung U_p und eine Abbildung $\tau_p : U_p \to \mathbb{C}$, τ^{-1} soll existieren und sowohl τ_p, τ_p^{-1} sollen stetig sein.

Ist von zwei Punkten p, q der Durchschnitt $U_p \cap U_q \ne \emptyset$, so ist $\tau_p \circ t_q^{-1}$ eine Abbildung einer Teilmenge von $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$. Sie sei holomorph.

Ein „Blatt" der Riemannschen Fläche von $\ln w$ ist durch ein festes n in

$\ln w = \ln |w| + i \arg w + n \cdot 2\pi i$

definiert.

3.) $g(x) = \sqrt[n]{x}$

Im Reellen ist $\sqrt[n]{x}$ eine (eindeutige) Funktion (per Definition $\sqrt{1} = +1$). $x^2 = 1$, $x = \pm 1 = \pm\sqrt{1}$.

Im Komplexen: $\sqrt[n]{z} := w$ als Lösung von $z = w^n$ (hier nimmt man alle Lösungen, im Reellen nur die positive Lösung).

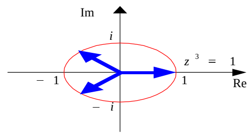
Zunächst: sei $z = 1$. Gesucht: w mit

$$\underbrace{w \cdot w \cdot \ldots \cdot w}_{n\text{-mal}} = 1 \; .$$

Bei einer Multiplikation werden die Beträge der Faktoren multipliziert und die Winkel addiert $\Rightarrow |w_k| = 1$,

$$w_1 = e^{\frac{2\pi}{n} i} , \; w_2 = e^{2 \frac{2\pi}{n} i} , \; \ldots , \; w_n = e^{n\, i \frac{2\pi}{n}} = 1$$

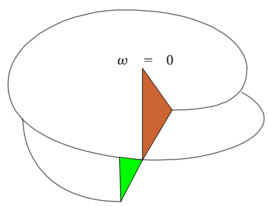
Diese w_i heißen n-te **Einheitswurzeln**.



Ist $a \in \mathbb{C}$ beliebig, $a = \varrho\, e^{i\,\varphi}$, so lässt sich die n-te Wurzel z von a schreiben als:

$$z = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\varrho}\; e^{i \frac{\varphi}{n}}\; w_i$$

n verschiedene Funktionswerte $\Rightarrow$ n komplexe Ebenen für das Urbild $z = \sqrt[n]{0}$ eindeutig $\Rightarrow$ alle drei Ebenen, **Blätter** genannt, haben 0 gemeinsam. Daher heißt $z = 0$ **Verzweigungspunkt** der Riemannschen Fläche. „Anfang" und „Ende" dieser Blätter sind miteinander verklebt.



$$z = \sqrt[2]{w}$$

9.7 Laurent-Reihen

Bisher: Potenzreihen der Form:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n$$

Jetzt auch: Potenzreihen der Form:

$$\sum_{n=-\infty}^{0} a_n\,(z - z_0)^n$$

Setze:

$$z - z_0 := \frac{1}{w - w_0}$$

$\Rightarrow$ Reihe:

$$\sum_{-\infty}^{0} a_n\,(z - z_0)^n = \sum_{0}^{\infty} a_{-n}\,(w - w_0)^n \; .$$

Sei der Konvergenzradius der zweiten Reihe s (d.h. konvergiert für $w - w_0 < s$), dann konvergiert die erste Reihe für $z - z_0 > 1/s =: r$.

Konvergiert eine zweite Reihe

$$\sum_1^\infty b_n (z - z_0)^n$$

für $|z - z_0| < R$ mit $R > r$, so betrachtet man die zusammengesetzte Reihe

$$(*) \quad \sum_{-\infty}^\infty c_n (z - z_0)^n := \sum_{-\infty}^0 a_n (z - z_0)^n + \sum_1^\infty b_n (z - z_0)^n,$$

$$c_n := \begin{cases} a_n \text{ für } n \le 0 \\ b_n \text{ für } n > 0 \end{cases},$$

die im Kreisring $r < |z| < R$ konvergiert.

Definition und Satz 9.2.2: Eine Reihe der Gestalt (*) heißt **Laurent-Reihe**. Sie konvergiert (wenn überhaupt) im Inneren des Kreisrings $r < |z| < R$, wobei r der Konvergenzradius von

$$\sum_{-\infty}^0 a_n (z - z_0)^n$$

und R der von

$$\sum_0^\infty b_n (z - z_0)^n$$

ist.

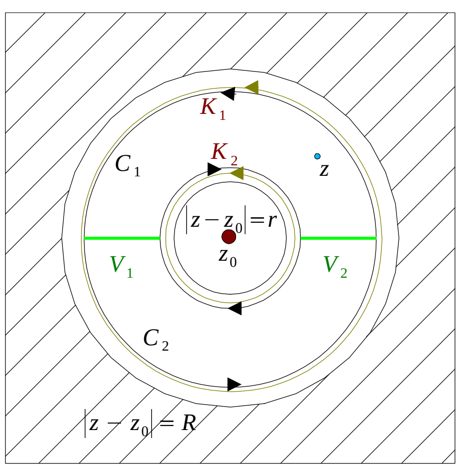
In diesem Kreisring ist die Reihe holomorph.

$$\sum_{-\infty}^{-1} c_n z_n$$

heißt **Hauptteil** der Reihe.

Die letzte Ausssage (Holomorphie) folgt aus dem Korollar zu Satz 9.18.

Satz 9.23 (Umkehrung von 9.22, Satz von Laurent): f sei im Inneren des Kreisrings $G: r < |z - z_0| < R$ holomorph. Dann lässt sich f in G in genau eine Laurent-Reihe im Punkt z_0 entwickeln.



Beweis: Zu einem beliebigen $z \in G$ wählt man zwei Kreise K_1, K_2 um z_0, die in G liegen, und zwischen denen z liegt. K_1, K_2 seien positiv orientiert. Durch zwei Verbindungslinien V_1, V_2 entstehen die geschlossenen Kurven C_1, C_2, die aus einem Teil von K_1, $-K_2$ und $\pm V_1$, $\pm V_2$ bestehen. z liegt in einem C_i, dies sei C_1.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(w)}{w-z}\,d w + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(w)}{w-z}\,d w = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_1}\frac{f(w)}{w-z}\,d w - \frac{1}{2\pi i}\int_{K_2}\frac{f(w)}{w-z}\,d w$$

Auf K_1:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0}\,\frac{1}{1-(z-z_0)/(w-z_0)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \quad (1)$$

Auf K_2:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{-1}{z-z_0}\,\frac{1}{1-(w-z_0)/(z-z_0)} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (2)$$

Wegen

$$\frac{z-z_0}{w-z_0} < 1$$

auf K_1 konvergiert (1) auf K_1.

Wegen

$$\frac{w-z_0}{z-z_0} < 1$$

auf K_2 konvergiert (1) auf K_2

Sei

$$a_n =: \frac{1}{2\pi i}\int_{K_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,d w \qquad n \geq 0\,,$$

$$a_{-n} := \frac{1}{2\pi i}\int_{K_2} f(w)(w-z_0)^{n-1}\,d w\,; \qquad n > 0$$

Damit entsteht aus (1):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$$

Eindeutigkeit: Annahme: Es gibt eine zweite Laurent-Reihe

$$\sum_{-\infty}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$

mit

$$\sum_{-\infty}^{\infty} b_n (z-z_0)^n = f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

für alle $z \in G$.

Multipliziere diese Gleichung mit $(z-z_0)^{-k-1}$ und integriere um einen Kreis K um z_0, $K \subset G$.

(**) $$\int_K \sum_{-\infty}^{\infty} b_n (z-z_0)^{n-k-1}\,d z = \int_K \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-k-1}\,d z$$

Gleichmäßige Konvergenz $\Rightarrow$ Summenzeichen und Integral dürfen vertauscht werden. Wegen:

$$\int_K (z-z_0)^p\,d z = \begin{cases} 2\pi i \text{ für } p = -1 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

(siehe unten) entsteht aus (**) $b_k \cdot 2\pi i = a_k \cdot 2\pi i$, also $b_k = a_k$.

Satz 9.24: Für eine geschlossene, doppelpunktfreie, positiv orientierte stückweise stetig differenzierbare Kurve K, die den Punkt z_0 in ihrem Inneren enthält, gilt:

$$\int_K (z - z_0)^p \, \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } p = -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ; \; p \in \mathbb{Z}$$

Beweis: O.B.d.A.: K sei ein Kreis um z_0 (vgl. Folgerung 1 zu 9.12). Die Punkte auf K schreibt man als:

$$z = z_0 + \varrho\, e^{i\varphi} \Rightarrow (z - z_0)^p = \varrho^p e^{i p \varphi} ; \; \mathrm{d}z = \varrho\, e^{i\varphi}\, i\, \mathrm{d}\varphi ;$$

$$\int_K (z - z_0)^p \, \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \varrho^p e^{i p \varphi} \cdot \varrho\, e^{i\varphi} \cdot i\, \mathrm{d}\varphi = i \int_0^{2\pi} \varrho^{p+1} e^{i(p+1)\varphi} \, \mathrm{d}\varphi$$

wegen

$$\int_0^{2\pi} \cos n\varphi \, \mathrm{d}\varphi = 0 = \int_0^{2\pi} \sin n\varphi \, \mathrm{d}\varphi$$

für $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Es bleibt nur $n = 0$, d.h. $p + 1 = 0$ oder $p = -1$; vgl. Beispiel 1 zu 9.10.

Definition 9.25: f sei in $z_0 \in \mathbb{C}$ nicht holomorph, jedoch in allen anderen Punkten einer Umgebung U von z_0. Dann heißt z_0 **isolierte Singularität** (oder **isolierter singulärer Punkt**) von f. Entwickelt man dieses f in eine Laurent-Reihe an der Stelle z_0;

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n ,$$

so können endlich viele oder unendlich viele a_n mit $n < 0$ ungleich 0 sein.

Im 2. Fall heißt z_0 **wesentliche Singularität**, im 1. Fall **Pol k-ter Ordnung**, wo k durch

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n ; \quad a_{-k} \neq 0$$

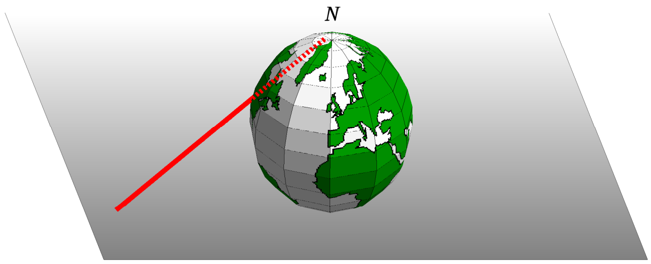
definiert ist.

Eine in einem Gebiet G bis auf Pole holomorphe Funktion heißt **meromorph** in G.

Satz 9.26: Besitzt f in $z_0 \in \mathbb{C}$ einen Pol, so wird $|f(z)|$ im Limes $z \to z_0$ beliebig groß. (Definiere $f(z_0) := \pm\infty$. Achtung, $\bar{\mathbb{C}}$ hat nur genau einen Punkt ∞.)

$$\underset{M>0}{\forall} \; \exists\, \delta > 0 : \; \left. \begin{array}{c} |z - z_0| < \delta \\ z \neq z_0 \end{array} \right\} \Rightarrow |f(z)| > M .$$

Beweis: $|f(z)|$ ist eine reelle Funktion, die Eigenschaft ist aus dem Reellen bekannt.



Satz 9.27 (Satz von Casorati-Weierstraß bzw. Picard): In jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität einer Funktion f kommt $f(z)$ jedem $a \in \mathbb{C}$ beliebig nahe:
Für alle $a \in \mathbb{C}$, alle $\varepsilon > 0$ und alle $\delta > 0$ existiert ein $z \in U$ mit $|z - z_0| < \delta$ und $|f(z) - a| < \varepsilon$.

„Das kommt von früher, als jede Nation die Sätze nach ihren eigenen Leuten benannt hat; aber heute ist es nicht viel anders, da wird alles nach Amerikanern benannt, egal ob sie was damit zu tun haben oder nicht."

Beweis: Sehr kompliziert, einer der mathematischen Glanzleistungen des 19. Jahrhunderts. Daher: hier nicht aufgeführt.

9.8 Der Residuensatz

Sei k eine Kurve, die homotop zu einem Kreis ist. In ihrem Inneren liege ein Punkt z_0, an dem f eine isolierte Singularität hat. Sonst sei f im Inneren von k und auf k holomorph. Laurent-Entwicklung:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n ,$$

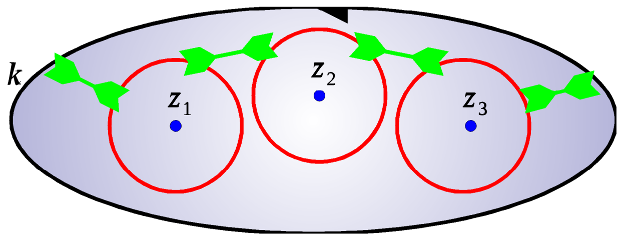
die auf k konvergiert: Im Inneren des Konvergenzradius. Daher ist die Konvergenz sogar gleichmäßig. $\Rightarrow$ Für positiv orientiertes k:

$$\int_k f(z) \,\mathrm{d}\, z = \int_k \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \,\mathrm{d}\, z = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \int_k (z - z_0)^n \,\mathrm{d}\, z = 2\,\pi\, i\, a_{-1} .$$

(Satz 9.24)

Definition: $a_{-1} = \dfrac{1}{2\,\pi\, i} \displaystyle\int_k f(z) \,\mathrm{d}\, z =: \operatorname*{res}_{z_0} f$ heißt **Residuum** von f an der Stelle z_0.

Mehrere isolierte Singularitäten innerhalb von k:



z_i : Singularitäten

Integral über k : $\sum_{i=1}^{3}$ Integral, die jeweils nur die Singularität z_i umschließt.

Zusammenfassung:

Satz 9.28 (Residuensatz): Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \bar{\mathbb{C}}$ meromorph und holomorph in $G - \{z_1, \ldots, z_N\}$. Die doppelpunktfreie geschlossene, stückweise stetig differenzierbare, positiv orientierte Kurve k liege samt ihrem Inneren ganz in G; $z_j \notin k$. Dann gilt:

$$\int_k f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_j \operatorname{res}_{z_j} f,$$

wobei über alle z_j zu summieren ist, die im Inneren von k liegen.

Satz 9.29: Sei G in $\mathbb{C}$ ein Gebiet und $f(z) \neq 0$ in G meromorph. Die doppelpunktfreie, geschlossene, positiv orientierte, stückweise C^1-Kurve k liege samt ihrem Inneren ganz in G. N sei die Anzahl der Nullstellen im Inneren von k, P die Anzahl der Pole (Nullstellen und Pole jeweils multipliziert mit ihrer Vielfachheit bzw. ihrer Ordnung). Auf k liege keine Nullstelle und kein Pol.
Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_k \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = N - P.$$

Beweis: Berechne die Residuen von $f'(z)/(2\pi i f(z))$:

a) Sei z_1 eine Nullstelle l-ter Ordnung, d.h. $f(z) = (z - z_1)^l \tilde{f}(z)$; $\tilde{f}(z_1) \neq 0$ und $\tilde{f}(z_1)$ beschränkt.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{l}{z - z_1} + \text{reguläre Terme},$$

d.h. das Residuum an einer l-fachen Nullstelle ist l.

b) Sei z_2 ein Pol k-ter Ordnung, d.h. $f(z) = (z - z_2)^{-k} \tilde{f}(z)$; $\tilde{f}(z_2) \neq 0$ und beschränkt in z_2.

$$f'(z) = -k(z - z_2)^{-k-1} \tilde{f}(z_2) + (z - z_2)^{-k} \tilde{f}'(z)$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-k}{z - z_2} + \text{reguläre Terme}$$

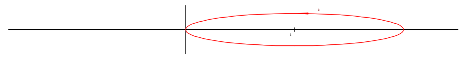
Behauptung folgt aus dem Residuensatz.

Beispiele:

1.) Berechne

$$\int_k \left(\frac{2}{z^2-1} + z^5 \right) \mathrm{d}\ z\ ;$$

k : Kreis $|z-1|^2 = 1$ (d.h. um 1 mit Radius 1), positiv orientiert.



a) Residuen: Summand z^5 ist holomorph;

$$\frac{2}{z^2-1} = \frac{2}{(z+1)(z-1)}$$

2 Pole: $z = \pm 1$.

Residuum a_n $z = -1$:

$$\left. \frac{2}{z-1} \right|_{z=-1} = -1\ .$$

Residuum a_n $z = +1$:

$$\left. \frac{2}{z+1} \right|_{z=+1} = 1$$

b) Residuensatz: Nur Pol an $z = 1$ interessant:

$$\int_k \left(\frac{2}{z^2+1} + z^5 \right) \mathrm{d}\ z = 2\ \pi\ i \cdot 1 = 2\ \pi\ i\ .$$

2.) Residuen von:

$$\frac{e^{i\ z}}{z^2 + (3-i)\ z - 3\ i}$$

Nullstellen: $i\ , -3$ $\Rightarrow$ Nenner: $(z-i)(z+3)$

Pol $z - i$: Residuum

$$\left. \frac{e^{i\ z}}{z+3} \right|_{z=i} = \frac{1}{e}\ \frac{1}{i+3}$$

Pol $z + 3$: Residuum

$$\left. \frac{e^{i\ z}}{z-i} \right|_{z=-3} = \frac{e^{-3\ i}}{-3-i}$$

3.) Zweifacher Pol: Berechne Residuen von

$$f\ (z) = \frac{e^{i\ z}}{z\ (z^2+1)^2} = \frac{e^{i\ z}}{z\ (z-i)^2\ (z+i)^2}$$

3 Pole: $z = 0$ (einfach), $z = \pm i$ (jeweils zweifach)

Pol $z = i$:

$$f\ (z) =:\ g\ (z)\ \frac{1}{(z-i)^2}$$

Taylorentwicklung von $g\ (z)$ an der Stelle $z = i$ $\Rightarrow$ Residuum von f an $z = i$ ist Koeffizient von $(z-i)$ dieser Entwicklung.

Definiere $z =:\ i + w \Rightarrow$

$$g(z) = \frac{e^{i w - 1}}{(i + w)(2 i + w)^2}$$

Entwickle dies nach Potenzen von w; nur lineare Glieder:

$$e^{i w - 1} = \frac{1}{e}(1 + i w + \dots)$$

$$\frac{1}{i + w} = \frac{1}{i(1 - i w)} = -i(1 + i w + \dots)$$

$$\frac{1}{(2 i + w)^2} = \frac{1}{-4(1 + w/(2 i))^2} = -\frac{1}{4}\left(1 - 2\frac{w}{2 i} + \dots\right)$$

$$f(z) = g(z)\frac{1}{(z - i)^2}$$

$$g(z) = \frac{i}{4 e} - \frac{w}{4 e} - \frac{w}{4 e} - \frac{w}{4 e} + \text{höhere Potenzen} = \frac{i}{4 e} - \frac{3 w}{4 e} + \dots$$

$\Rightarrow$ Residuum von $f(z)$ an $z = i$ ist $-3/(4 e)$

Pole k-ter Ordnung: Schreibe

$f(z) = \dfrac{g(z)}{(z - z_0)^k}$ (*),

wobei $g(z)$ in z_0 holomorph sein muss, $g(z_0) \neq 0$. Dann ist der Koeffizient von $(z - z_0)^{k-1}$ das gesuchte Residuum an der Stelle z_0.

Einfache Rechenmethode:

$g(z) = (z - z_0)^k f(z)$ (aus *)

Satz 9.19:

$$a_{k-1} = \frac{1}{(k-1)!} g^{k-1}(z_0)$$

a_{k-1}: Koeffizient von $(z - z_0)^{k-1}$ in der Taylorentwicklung von $g(z)$ $\Rightarrow$

$$\operatorname*{res}_{z_0} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d} z^{k-1}}\left[(z - z_0)^k f(z)\right]$$

Nützliche Formel bei Polen 1. Ordnung: Seien die Funktionen $g(z)$, $h(z)$ um z_0 holomorph und sei $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$, $h(z_0) \neq 0$. Dann gilt:

$$\operatorname*{res}_{z_0} \frac{h}{g} = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

Beweis:

$$\frac{h(z)}{g(z)} = \frac{\overbrace{h(z_0)}^{\neq 0} + h'(z_0)(z - z_0) + 1/2\, h''(z_0)(z - z_0)^2 + \dots}{\underbrace{g(z_0)}_{= 0} + \underbrace{g'(z_0)}_{\neq 0}(z - z_0) + \dots} =$$

$$= \frac{h(z_0)}{g'(z_0)(z - z_0) + \dots} + \frac{h'(z_0)(z - z_0) + \dots}{g'(z_0)(z - z_0) + \dots}$$

$$\Rightarrow \operatorname*{res}_{z_0} f = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)} \text{ mit } f := \frac{h}{g}.$$

9.9 Anwendung der Residuentheorie zur Berechnung von Integralen

Beispiele:

1.) Integrale der Form:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, \mathrm{d}t$$

R : rationale Funktion, die auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$ keine Pole besitzt.

$R = R(x, y)$; $x = \cos t$, $y = \sin t$;

Setze $z := e^{it}$, $\mathrm{d}z = i\, e^{it}\, \mathrm{d}t = i\, z\, \mathrm{d}t$.

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \ldots$$

geht in das Integral über den Einheitskreis über.

$$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, \mathrm{d}t = \int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) \frac{\mathrm{d}z}{i\, z} =$$

$$= 2\pi \sum \operatorname{res}\left[\frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)\right]$$

Summe über die Residuen aller Singularitäten innerhalb des Einheitskreises.

Beispiel: Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a + \sin t} = 2\pi \sum \operatorname{res}\left[\frac{1}{z} \frac{1}{a + 1/(2i)(z - 1/z)}\right] = 2\pi \sum \operatorname{res} \frac{2i}{z^2 + 2\, i\, a\, z - 1};$$

Nullstellen des Nenners: $z_{1,2} = -i\, a \pm i\sqrt{a^2 - 1}$.

Wegen $a > 1$ liegt $z_1 = -i\, a - i\sqrt{a^2 - 1}$ außerhalb des Einheitskreises, dagegen $z_2 = -i\, a + i\sqrt{a^2 - 1}$ innerhalb.

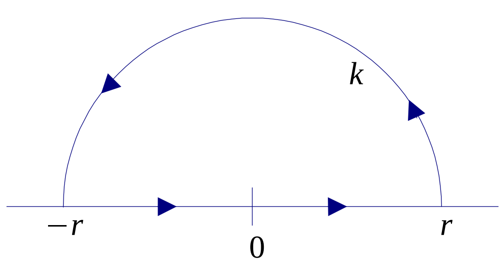
$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a + \sin t} = 2\pi \frac{2i}{\underbrace{z_2 - z_1}_{(z - z_1)(z - z_2)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

2.) Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, \mathrm{d}x:$$

R : rationale Funktion ohne reelle Pole; außerdem muss dieses Integral existieren, wir nehmen also an:

$$\lim_{|x| \to \infty} x \cdot R(x) = 0.$$



Betrachte

(1) $\int_{-r}^{r} R(x)\,\mathrm{d}x + \int_{k} R(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_i > 0} \operatorname{res}_{z_i}(R(z))$.

Dabei ist k ein positiv orientierter Halbkreis um 0 in der oberen Halbebene.

1. Integral
   $$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$
   konvergiert, wenn
   $$\lim_{x\to\infty} f(x) \le \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$$
   gilt mit $\varepsilon > 0$.
2. Integral
   $$\int_0^{b} \frac{g(x)}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x$$
   mit $g(0)\neq 0$ konvergiert genau für $\alpha < 1$.

z.z.:

$\int_k R(z)\,\mathrm{d}z \to 0$ für $r\to\infty$

$\left|\int_k R(z)\,\mathrm{d}z\right| \le M(r)\cdot r\cdot\pi$

$M(r)$: Maximum von $|R(z)|$ auf k.

Es gilt:

$\lim_{r\to\infty} M(r)\cdot r = 0$.

Da R eine rationale Funktion ist,

$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

(f, g Polynome), mit

$\lim_{|x|\to\infty} x\,R(x) = 0$

folgt, dass Grad $g(x) \ge$ Grad $f(x)+2$.

Falls R *keine* rationale Funktion ist: Schluss wird falsch, d.h. es muss in jedem Fall

$\int_k R(z)\,\mathrm{d}z \to 0$ für $r\to\infty$

eigens bewiesen werden.

> ***Bemerkung**: Statt k hätte man auch einen negativ orientierten Kreisbogen l in der unteren Halbebene verwenden können.*

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty}\left[\int_{-r}^{r} R(x)\,\mathrm{d}x + \int_{l} R(z)\,\mathrm{d}z\right] = -2\pi i \sum_{\operatorname{im} z_i < 0} \operatorname{res}_{z_i} R(z)$.

Für reelle Polynome sind (1) und (2) gleich, d.h. die Summe der Residuen in der oberen und in der unteren Halbebene ist 0. Für reelle Polynome gilt: Die Nullstellen sind entweder reell oder Paare konjugiert komplexer Zahlen.

$P(x) = (x-x_1)^{k_1} + (x-x_2)^{k_2} + \dots$ ($x_i \in \mathbb{C}$, $k_i \in \mathbb{N}$, P reell)

$\Rightarrow$ zu jedem x_i muss ein x_i^* existieren mit dem gleichen k_i.

3.) Integrale der Form:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i x}\, \mathrm{d}\, x$$

Methode wie in 2.)

Satz 9.30: Gilt

$$\lim_{|z| \to \infty} f(z) = 0$$

für $\operatorname{Im} z \geq 0$, und ist $f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) holomorph, so gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i x}\, \mathrm{d}\, x = 2\, \pi\, i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}\left(f(z)\, e^{i z}\right).$$

Beweis: Zu zeigen:

$$\int_k f(z)\, e^{i z}\, \mathrm{d}\, z = 0,$$

wo k ein positiv orientierter Halbkreis in der oberen Halbebene um 0 mit Radius r ist und der Limes $r \to \infty$ betrachtet wird.

Sei $z =: r\, e^{i \varphi}$ und

$$M(r) := \max_{z \in k} |f(z)|.$$

Voraussetzung $\Rightarrow$

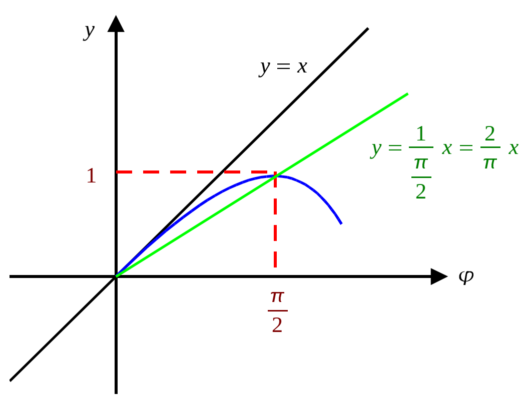
$$\lim_{r \to \infty} M(r) = 0$$

$$\left|\int_k f(z)\, e^{i z}\, \mathrm{d}\, z\right| \leq \lim_{r \to \infty} M(r) \int r\, e^{-r \sin \varphi}\, \mathrm{d}\, \varphi$$

mit:

$$\left|e^{i z}\, \mathrm{d}\, z\right| = \left|e^{i r (\cos \varphi + i \sin \varphi)}\, r\, e^{i \varphi}\, \mathrm{d}\, \varphi\right| = r\, \mathrm{d}\, \varphi\, \underbrace{\left|e^{i r \cos \varphi}\right|}_{=1}\, e^{-r \sin \varphi}$$

$$\int_0^{\pi} e^{-r \sin \varphi}\, r\, \mathrm{d}\, \varphi = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-r \sin \varphi}\, r\, \mathrm{d}\, \varphi \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2}{\pi} r \varphi}\, r\, \mathrm{d}\, \varphi \leq 2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{2}{\pi} r \varphi}\, \mathrm{d}\, (r\, \varphi) = \pi$$



Beispiel:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1}\, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{i x} + e^{-i x}}{x^2 + 1}\, \mathrm{d}\, x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i x}}{x^2 + 1}\, \mathrm{d}\, x.$$

Satz 9.30: Residuen; $e^{i x}$ ist holomorph;

$1/(x^2 + 1) = 1/[(x + i)(x - i)]$ 2 einfache Pole an $z = \pm i$, hier ist nur der Pol mit $z = +i$

interessant.
Residuum an $z = +i$ ist:

$$\left.\frac{e^{ix}}{x+i}\right|_{x=i} = \frac{1}{2ie} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2e}$$

4. Integrale der Form:

$$\int_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\ ;\ \alpha \in \mathbb{R}\ ,\ 0 < \alpha < 1$$

Wegen $\alpha < 1$ konvergiert das Integral an der unteren Integrationsgrenze (R sei holomorph auf $\mathbb{R}_+$). Damit es an der oberen Grenze konvergiert, soll gelten:

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot R(x) = K \in \mathbb{R}\ ,$$

da $\alpha > 0$ ist.

Beachte:

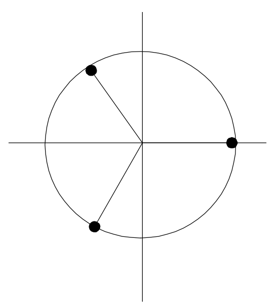
$$\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$$

konvergiert, wenn

$$\lim_{x\to\infty} g(x) \le \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\ ;\ \varepsilon > 0$$

Analytische Fortsetzung z^α von x^α muss noch eindeutig erklärt werden, d.h. es muss der Zweig dieser Funktion bestimmt werden.

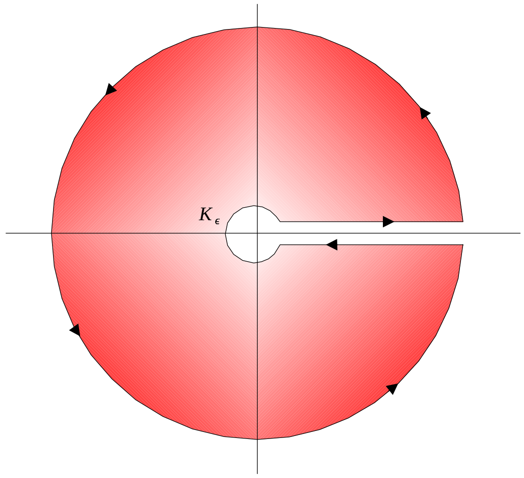
$\sqrt[3]{x}$



***Bemerkung**:* $a^b := e^{\operatorname{Ln} a^b} = e^{b(\ln a + 2\pi i k)}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{Ln} a$: *„Hauptzweig" von* $\ln a$
$0 \le \arg \operatorname{Ln} a < 2\pi$

Wir legen fest, dass $0 \le \arg z < 2\pi$ gelten soll:

5.



K_ε sei der Kreis um 0 mit Radius $\varepsilon > 0$

K_r sei der Kreis um 0 mit Radius $r > \varepsilon$

(alle Kreise seien im *positiven Sinne* durchlaufen!)

k sei die gesamte Kurve:

$$\int_k \frac{R(z)}{z^\alpha}\,\mathrm{d}\,z = \int_{K_\varepsilon} \frac{R(z)}{z^\alpha}\,\mathrm{d}\,z + \int_{K_r} \frac{R(z)}{z^\alpha}\,\mathrm{d}\,z + \int_\varepsilon^r \frac{R(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}\,x - e^{-2\pi i\alpha} \int_\varepsilon^r \frac{R(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}\,x$$

Faktor $e^{-2\pi i\alpha}$ im letzten Term:

$$z^{-\alpha} = \left(e^{2\pi i}\,|z|\right)^{-\alpha} = e^{-2\pi i\alpha}\,|z|^{-\alpha}$$

a) $\displaystyle\int_{K_r} \frac{R(z)}{z^\alpha}\,\mathrm{d}\,z = 0$:

Betrachte zunächst $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$\lim\limits_{z\to\infty} z \cdot f(z) = 0$ (*)

$$\Rightarrow \left|\int_{\text{Sektor}} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \le \underbrace{M(r)\cdot r}_{\to 0}\cdot\gamma \to 0$$

„Sektor“ ist ein Kreisbogen mit Radius r um 0 und mit Winkel γ. $M(r)$ ist das Maximum von $f(z)$ auf diesem Sektor.

Für $r \to \infty$ folgt:

$$\int_{\text{Sektor}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$$

Jetzt:

$$f(z) = \frac{R(z)}{z^\alpha} \Rightarrow \text{ für rationale } R$$

Wie in 2.): aus

$\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot R(x) = K \in \mathbb{R}$

folgt auch:

$\lim\limits_{|z|\to\infty} z \cdot R(z) = K$

$\Rightarrow$ Voraussetzung (*) für vorausgehende Überlegungen ist erfüllt.

Ist dagegen R *nicht rational*, so muss man *zusätzlich* fordern:

$\lim\limits_{z\to\infty} z\, R(z) \le L \in \mathbb{C}$, damit

$$\int_{K_r} \frac{R(z)}{z^\alpha}\, \mathrm{d}z = 0$$

gilt.

b) $$\int_{K_\varepsilon} \frac{R(z)}{z^\alpha}\, \mathrm{d}z$$

Überlegungen wie in a).

Gilt für ein f:

$$\lim_{z \to 0} z \cdot f(z) = 0\,,$$

so folgt:

$$\lim_{z \to 0} \left| \int_{\text{Sektor}} f(z)\, \mathrm{d}z \right| \le \lim_{r \to 0} \underbrace{M(r) \cdot r}_{\to 0} \cdot \gamma = 0$$

$$f(z) = \frac{R(z)}{z^\alpha}$$

erfüllt wegen $\alpha < 1$ diese Voraussetzung immer.

c) $$\int_k \frac{R(z)}{z^\alpha}\, \mathrm{d}z = \left(1 - e^{-2\pi i \alpha}\right) \int_\varepsilon^r \frac{R(z)}{z^\alpha}\, \mathrm{d}z$$

Dabei ist der Limes $\varepsilon \to 0$ und $r \to \infty$ zu nehmen.

Linke Seite:

$$2\pi i \sum_z \operatorname{res} \frac{R(z)}{z^\alpha}$$

Beispiel:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha (1 + x)}$$

mit $0 < \alpha < 1$.

$1/(1 + x)$ ist eine rationale Funktion $\Rightarrow$ keine Zusatzvoraussetzungen nötig. Es gilt ja:

$$\lim_{x \to \infty} x \cdot R(x) = \frac{\lim x}{1 + x} = 1 =: K$$

Einziger Pol von $1/(1 + z)$ ist $z = -1$; Residuum von $1/[z^\alpha (1 + z)]$ ist:

$$\left.\frac{1}{z^\alpha}\right|_{z = -1} \underset{\substack{\text{Hauptzweig} \\ \text{wegen } \alpha < 1}}{=} e^{-\pi i \alpha}\,.$$

Also:

$$\int_k \frac{\mathrm{d}z}{z^\alpha (1 + z)} = 2\pi i\, e^{-\pi i \alpha} = \left(1 - e^{-2\pi i \alpha}\right) \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha (1 + x)}$$

oder:

$$2\pi i = \Bigg(\underbrace{e^{\pi i \alpha} - e^{-\pi i \alpha}}_{2 i \sin \pi \alpha}\Bigg) \cdot \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha (1 + x)}$$

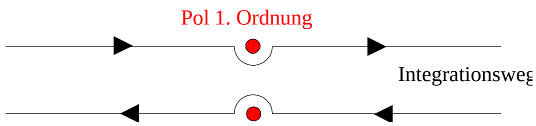
$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha (1 + x)} = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$$

6. Pole auf dem Integrationsweg

Satz 9.31: Besitzt die Funktion $f(z)$ in $z = z_0$ einen einfachen Pol, so gilt:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{K_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = \pi i \operatorname{res}_{z_0} f(z),$$

wobei K_ε der *Halb*kreis um z_0 mit Radius ε und positiver Orientierung ist.



Beweis: Da $f(z)$ in z_0 einen einfachen Pol besizt, ist die Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots =: \frac{a_{-1}}{z - z_0} g(z)$$

mit einem in z_0 holomorphen $g(z)$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left| \int_{K_\varepsilon} g(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq \lim_{\varepsilon \to 0} M(\varepsilon) \cdot \varepsilon \cdot \pi = 0,$$

wo $M(\varepsilon)$ das Maximum von $|g(z)|$ auf K_ε ist.