Eine Zusammenfassung

Experimentalphysik
Optik

nach den Büchern „Experimentalphysik 2" von Wolfgang Demtröder, Springer Verlag und
„Taschenbuch der Physik" von Horst Stöcker, Verlag Harri Deutsch und
dem Skript der Vorlesung „Experimentalphysik 3" im WS 2000/2001 an der TUM von Helmut Schober

Datum: 16.02.2001

von Christoph Moder

http://www.skriptweb.de

Hinweise (z.B. auf Fehler) bitte per eMail an uns: cm@skriptweb.de – Vielen Dank.

Inhaltsverzeichnis

Elektromagnetische Wellen 4
- Intensität 4
- Poynting-Vektor 4
- Impulsdichte 4
- TE- und TM-Wellen 5
- Fourierdarstellung 5

Elektromagnetische Wellen in Materie 6
- Brechungsindex 6
- Absorption und Dispersion 6
  - Totalreflexion 7
- Polarisation 7
  - Lineare Polarisation 7
  - Zirkulare Polarisation 8
  - Elliptische Polarisation 8
  - Polarisationsgrad 8
  - Jones-Darstellung 8
  - Chiralität von Photonen 8
  - Polarisation durch Streuung 9
  - Polarisation durch Metalle 9
  - Dichroismus 9
  - Doppelbrechung, λ/n-Plättchen und Phasenschieber 9
  - Optische Aktivität 10
  - Spannungsdoppelbrechung, Kerr-Effekt, Cotton-Mouton-Effekt, Faraday-Effekt 10
  - Fresnelsche Formeln 11

Geometrische Optik 12
- Grundaxiome 12
- Die optische Abbildung 13
  - Konvention zur geometrischen Bildkonstruktion 13
  - Beispiele von optischen Abbildungen 13
  - Prismen 14
  - Linsen 15
    - Dünne Linsen 16
    - Dicke Linsen 17
    - Linsensysteme 17
    - Linsenfehler 17
    - Matrixmethoden der geometrischen Optik 18

Interferenz und Beugung 20
- Kohärenz 20
- Beispiele von Interferenz 20
  - Interferenz an einer planparallelen Platte 20
  - Michelson-Interferometer 21
  - Sagnac-Interferometer 21
  - Mach-Zehnder-Interferometer 21
  - Dielektrische Spiegel 21
  - Antireflexschicht 22
- Beugung 22
  - Beugung am Spalt 22

Beugungsgitter 23
Fresnel-Zonenplatte und Fresnel-Zonenlinse 23
Optische Instrumente 25
Das Auge 26
Aufbau 26
Fehlsichtigkeit 26
Die Lupe 26
Nichtlineare Optik 27
Effekte zweiter Ordnung – Frequenzverdopplung etc. 27
Effekte dritter Ordnung 27
Quantenoptik 28
Der Photoeffekt 28
Quantenausbeute, Empfindlichkeit und Dunkelstrom 28
Innerer Photoeffekt 29
Inverser Photoeffekt 29
Photonenmasse 29
Photonenimpuls 29
Interferenz, quantenmechanisch betrachtet 30
Heisenbergsche Unschärferelation 30
Materiewellen 31
Monochromator 31
Beugung von Elektronen 31
Materiewellen 31
Unschärfe 32

Elektromagnetische Wellen

Intensität

Die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes beträgt
$w_{em}=\frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,(E^2+c^2\,B^2)=\varepsilon_0\,E^2$.

Diese Energiedichte wird bei einer elektromagnetischen Welle mit Lichtgeschwindigkeit c in Richtung des Ausbreitungsvektors $\vec{k}$ transportiert.
Daraus ergibt sich die **Intensität** bzw. **Energiestromdichte** (d.h. die pro Zeit durch eine Flächeneinheit senkrecht zur Ausbreitungsrichtung transportierte Energie):
$I=c\,\varepsilon_0\,E^2$.

Betrachtet man nur eine Welle ($\vec{E}=\vec{E}_0\sin(\omega\,t-\vec{k}\cdot\vec{r})$), dann sieht man, dass ihre Intensität zweimal pro Schwingungsperiode Null wird. Bei einer Überlagerung von Wellen kann das anders sein, z.B. ist sie bei zirkular polarisiertem Licht $I=c\,\varepsilon_0\,E_0^2$.

Die mittlere Amplitude ist:
$\bar{I}=\frac{1}{2}\,c\,\varepsilon_0\,E_0^2$.

Poynting-Vektor

Die Richtung des Energieflusses (d.h. W/m²) wird durch den Poynting-Vektor angegeben:
$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$
bzw. im Vakuum
$\vec{S}=\varepsilon_0\,c^2\,(\vec{E}\times\vec{B})$.

Der Betrag des Poynting-Vektors ist gleich der Intensität:
$|\vec{S}|=\varepsilon_0\,c^2\,|\vec{E}|\cdot|\vec{B}|=\varepsilon_0\,c\,E^2=I$.

In isotropen Medien zeigt der Poynting-Vektor in die gleiche Richtung wie der Wellenvektor $\vec{k}$.

Poynting-Vektor in einem stromdurchflossenen Draht: Da das elektrische Feld in Richtung des Drahtes verläuft (weil in diese Richtung die Spannung wirkt) und das Magnetfeld bekanntlich den Draht kreisförmig umgibt, muss der Poynting-Vektor radial in den Draht hineinzeigen. Interpretieren kann man das so: Die Energie wird nicht durch den Ladungstransport transportiert (die Elektronen bewegen sich mit einer sehr kleinen Driftgeschwindigkeit), sondern durch das elektromagnetische Feld!

Impulsdichte

Man kann einer elektromagnetischen Welle auch eine Impulsdichte zuordnen:
$\vec{\pi}=\frac{1}{c^2}\,\vec{S}=\varepsilon_0\,(\vec{E}\times\vec{B})$
$|\vec{\pi}|=\varepsilon_0\cdot E\cdot B=\frac{I}{c^2}$.

Der Vektor der Impulsdichte zeigt also in die selbe Richtung wie der Poynting-Vektor.

So kann man den durch Impulsübertrag entstehenden Strahlungsdruck berechnen, der z.B. den Schweif von Kometen hervorruft (daher ist der Kometenschweif immer von der Sonne weggekrümmt – aber der Sonnenwind trägt dazu auch bei, neben dem Strahlungsdruck). (Da der

Schweif sowohl aus geladenen als auch ungeladenen Teilchen besteht, sieht man oft zwei Schweife, die verschieden stark gekrümmt sind.)

[stehende Wellen, Hohlleiter, Dispersion von Wellen in Hohlleitern und Phasengeschwindigkeit > c, Grenzwellenlänge im Hohlleiter, Koaxialkabel, Wellenwiderstand]

TE- und TM-Wellen

Steht der elektrische Vektor senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (z-Richtung) (d.h. hat der elektrische Feldvektor keine Komponente in z-Richtung), nennt man die Welle TE-Welle (transversal elektrisch).
Hat der elektrische Feldvektor der Welle eine Komponente in Ausbreitungsrichtung, dann muss muss der magnetische Feldvektor senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen (d.h. in z-Richtung keine Komponente haben); man nennt die Welle dann TM-Welle.

Fourierdarstellung

Da in der Wellengleichung die Wellenfunktion (und ihre Ableitungen) nur in erster Potenz auftreten, handelt es sich um eine lineare Abbildung. Daraus folgt, dass sich elektromagnetische Wellen nicht gegenseitig beeinflussen; die Addition zweier Wellen wieder eine elektromagnetische Welle. Daher kann man jede elektromagnetische Welle mit Hilfe der Fouriertransformation aus harmonischen, ebenen Wellen kombinieren.

Elektromagnetische Wellen in Materie

Ansatz: Ergänzung der Maxwell-Gleichungen durch Terme, die den Einfluss des Mediums beschreiben.

> **Definition**: Als **Wellenzahl** bezeichnet man
> $$k = \frac{2\ \pi}{\lambda}\ .$$

Brechungsindex

– Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen ist in einem Medium kleiner als im Vakuum:

$$n = \frac{c_{Medium}}{c_{Vakuum}} < 1$$

(n : **Brechungsindex**)

– Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen in einem Medium ist auch von der Wellenlänge abhängig.

Erklärung: Die Wellen regen die Atome des Mediums zu Schwingungen an, daraufhin senden die Atome Sekundärwellen aus, die gegenüber der ursprünglichen Welle phasenverschoben sind. Ursprüngliche Welle und Sekundärwellen überlagern sich, die resultierende Welle ist wegen der Phasenverschiebung der Sekundärwellen ebenfalls verzögert – die resultierende Welle kommt später an, ihre Geschwindigkeit im Medium ist also kleiner als außerhalb.

Wenn man die Sekundärwellen genähert als gedämpfte harmonische Oszillationen (hervorgerufen durch die Schwingung der Dipole im Medium) betrachtet, ergibt sich (nach einiger Rechnung), dass der Brechungsindex eine komplexe Zahl ist, die von der Atomdichte des Mediums und der Frequenzdifferenz zwischen der Frequend der elektromagnetischen Welle und der Resonanzfrequenz der Dipole im Medium abhängt.

Absorption und Dispersion

Wenn man den komplexen Brechungsindex vereinfacht schreibt als

$$n = n' - i\ \kappa$$

und dies einsetzt in die Formel

$$\vec{E}\ (z) = \vec{E}_0\ e^{i\ \omega\ (t - z/c)} \cdot e^{-i\ \omega\ (n-1)\ \Delta\ z/c}$$

(die die elektromagnetisch Welle im Medium beschreibt – der letzte Faktor gibt die Sekundärwellen an), dann ergibt sich:

$$\vec{E}\ (z) = \vec{E}_0\ e^{-\omega\ \kappa \frac{\Delta\ z}{c}} \cdot e^{-i\ \omega\ (n'-1) \frac{\Delta\ z}{c}} \cdot e^{i\ (\omega\ t - k_0\ z)} \equiv A \cdot B \cdot \vec{E}_0 \cdot e^{i\ (\omega\ t - k_0\ z)}\ .$$

Dabei gibt der Faktor $A = e^{-\omega\ \kappa\ \Delta\ z/c}$ die Abnahme der Amplitude an; nach der Strecke $\Delta\ z = c/(\omega \cdot \kappa)$ ist die Amplitude auf $1/e$ abgesunken. Die Intensität sinkt dadurch:

$I = I_0 \cdot e^{-\alpha\ \Delta\ z}$ (**Beersches Absorptionsgesetz**)

Der **Absorptionskoeffizient** ist

$$\alpha = \frac{4\ \pi\ \kappa}{\lambda_0} = 2\ k_0\ \kappa\ .$$

Wie man sieht, ist der Absorptionskoeffizient proportional zum Imaginärteil κ des Brechungsindex. Das bedeutet: Hat der Brechungsindex einen Imaginärteil, dann wird vom Material

Licht absorbiert. Kann man den Brechungsindex durch seinen Realteil nähern, dann ist das Medium durchsichtig.

Der Faktor B in obiger Formel gibt die Phasenverzögerung der Welle beim Durchgang durch das Medium an. Bei einer Laufstrecke $\Delta z = \lambda_0$ legt die Welle dann $\Delta \varphi = n' \cdot 2\pi$ zurück, statt 2π wie im Vakuum. Das bedeutet: Die Wellenlänge wird kleiner gegenüber der Vakuumwellenlänge. Weil die Frequenz konstant bleibt, ergibt sich für die Phasengeschwindigkeit $c' = f \cdot \lambda = c / n'$.

Es ergeben sich (aus der Herleitung des komplexen Brechungsindex) die **Dispersionsrelationen**:

$$n' = 1 + \frac{N e^2}{2 \varepsilon_0 m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2},$$

$$\kappa = \frac{N e^2}{2 \varepsilon_0 m} \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}.$$

[Fresnel-Formeln]

[beim Übergang in ein optisch dünneres Medium wird der Lichtstrahl vom Lot weggebrochen und umgekehrt]

Totalreflexion

Totalreflexion tritt ein, wenn Licht vom optisch dichteren Medium unter einem größeren Winkel als dem Grenzwinkel der Totalreflexion auf die Grenzfläche zum optisch dünneren Medium fällt. Es gilt:

$$\sin \varepsilon_g = \frac{n_{dünn}}{n_{dicht}}.$$

Totalreflexion wird in Prismen zur Strahlumlenkung (Bildumkehr) benutzt (z.B. Spiegelreflexkamera), oder in Lichtwellenleitern (je kleiner der Grenzwinkel, desto unempfindlicher ist der Lichtwellenleiter durch Verlust in Krümmungen; dort koppeln Strahlen aus, weil dort wegen der Krümmung der Grenzwinkel nicht mehr erreicht wird). Oder: Faseroptische Sensoren (Lichtwellenleiter, deren „Mantelmedium“ das umgebende Medium ist; z.B. in Luft koppeln sie bei gegebener Krümmung wenig Licht aus, während sie im Wasser einen deutlich höheren Lichtverlust haben => Füllstandsmesser).

Polarisation

Elektromagnetische Wellen sind Transversalwellen. Der magnetische Feldvektor steht zwar immer senkrecht auf dem elektrischen Feldvektor (d.h. $\vec{B} = 1/\omega \, (\vec{k} \times \vec{E})$, $|\vec{B}| = 1/c \, |\vec{E}|$), aber die absolute Ausrichtung dieser Vektoren kann sich zeitlich ändern. Es reicht also aus, nur das elektrische Feld anzugeben (weil das magnetische ja immer senkrecht drauf steht), und zwar durch zwei Vektoren, die seine Schwingungsebene, die senkrecht zur Ausbreitungsrichtung steht, angeben.

Lineare Polarisation

Braucht man keine Ebene, um den elektrischen Feldvektor anzugeben, sondern schwingt er nur in einer Linie (d.h. seine Richtung ändert sich nicht zeitlich, er zeigt stets in die gleiche Richtung), nennt man dies lineare Polarisation. Wenn man lineare Polarisation als Überlagerung mehrerer Wellen sieht, bedeutet das, dass die Wellen in Phase schwingen.
Anschaulich ist lineare Polarisation mit einer schwingenden Saite vergleichbar, die in eine Richtung

ausgelenkt wurde: Jeder Punkt der Saite schwingt nur auf und ab, d.h. ändert zeitlich seine Amplitude, aber nicht seine Richtung, er beschreibt eine Linie. (Das magnetische Feld schwingt genauso, aber senkrecht dazu – also sozusagen wie zwei Saiten am selben Ort, die senkrecht zueinander schwingen. Aber das Magnetfeld wird hier ignoriert, weil seine Schwingungsrichtung durch die Schwingungsrichtung des elektrischen Felds gegeben ist.)

Zirkulare Polarisation

Hier ändert sich die Richtung des elektrischen Feldvektors mit der Zeit. Er beschreibt einen Kreis. So eine Schwingung kommt zustande durch eine Überlagerung zweier Wellen mit der selben Frequenz und Amplitude, aber um $\pi/2$ phasenverschoben (vgl. Lissajous-Figuren auf dem Oszilloskop durch Anlegen von Sinusschwingungen auf x- und y-Achse). Eine Welle eilt der anderen also mit konstantem Abstand hinterher. Weil man hier unterscheiden kann, in welche Richtung sich der Vektor dreht, spricht man von links- und rechtspolarisiertem Licht (d.h. rechtspolarisiertes Licht bedeutet: die Feldvektoren beschreiben eine rechtshändige Spirale in Ausbreitungsrichtung der Welle). Rechtspolarisiertes Licht bezeichnet man mit einem Plus-, linkspolarisiertes Licht mit einem Minuszeichen. Zirkular polarisiertes Licht kann man z.B. mit einem Fresnel-Rhomboeder (Grundfläche = Parallelogramm) erzeugen.
Anschaulich entspricht dies einer Saite, die so angeregt wurde, dass sie kreisförmig schwingt, d.h. jeder Punkt der Saite eine Kreisbahn beschreibt.

Elliptische Polarisation

Wie die zirkulare Polarisation, aber die Amplituden der beiden überlagerten Wellen sind verschieden. Man kann zirkular polarisiertes und auch linear polarisiertes Licht als Spezialfall der elliptischen Polarisation auffassen.

Polarisationsgrad

Den Quotienten aus der Intensität der polarisierten Komponente und der Gesamtintensität nennt man Polarisationsgrad.

Jones-Darstellung

Man kann den Polarisationszustand als zweidimensionalen Vektor schreiben (denn es spielt sich ja in der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung ab) (man nimmt dazu den normierten elektrischen Feldvektor, und wählt den Phasennullpunkt beliebig, z.B. so, dass er in der x-Komponente 0 ist), und die Veränderung der Polarisation beim Durchgang durch ein Medium als Matrizenmultiplikation beschreiben. Die Vektoren heißen dann Jones-Vektoren, und die Abbildungsmatrizen Jones-Matrizen.
Beispielsweise ist der Jones-Vektor für horizontale bzw. vertikale Polarisation $(1, 0)$ bzw. $(0, 1)$ oder allgemein bei linearer Polarisation in einem Winkel ϑ gleich $(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, oder für positiv zirkular polarisiertes Licht $(1, +i)$.

Chiralität von Photonen

Zirkular polarisiertes Licht kann geladene Teilchen in Drehung versetzen, d.h. Photonen sind in der Lage, einen Drehimpuls zu transportieren. Weil es zirkulare Polarisation in beide Richtungen gibt, gibt es (wenn man das Licht als quantisiert betrachtet) Photonen mit beiden Händigkeiten, d.h. ihr Drehimpuls beträgt $\pm\hbar$.
Das ist eine Besonderheit der elektromagnetischen Wechselwirkung. Die schwache Wechselwirkung z.B. hat so etwas nicht: Neutrinos sind stets linkshändig, Antineutrinos stets rechtshändig.

Polarisation durch Streuung

Ein streuendes Medium besteht aus kleinen Dipolen. Licht trifft auf diese Dipole und wird absorbiert, sie werden zum Schwingen angeregt, und strahlen wiederum Licht ab, das entsprechend ihrer Schwingung polarisiert ist (d.h. in Richtung der Schwingungsachse). D.h. das Licht, das senkrecht zur Einfallsrichtung aus dem Medium herausgestreut wird, ist zu 100% polarisiert, und zwar jeweils senkrecht zur Einfalls- und zur Ausfallsrichtung aus dem Medium.

Polarisation durch Metalle

Da Metalle leitend sind, schirmen sie elektromagnetische Felder ab. Da sie aber nicht ideal leitend sind, können die Felder ein Stück weit in das Metall eindringen (Skineffekt), wobei ein Teil des Lichts absorbiert wird. Absorption kann man mathematisch durch einen Imaginärteil im Brechungsindex beschreiben.
Es ergibt sich, dass die Amplitudenreflexionskoeffizienten für verschiedene Feldrichtungen unterschiedlich sind, was bedeutet, dass linear polarisiertes Licht grundsätzlich bei der Reflexion an Metallen elliptisch polarisiert wird. Dies unterscheidet Metalle von Dielektrika. Durch Messen der Polarisation kann man den komplexen Brechungsindex bestimmen, oder in der Ellipsometrie aus der Veränderung der elliptischen Polarisation um wenige Hundertstel Grad die Dicke dünner Schichten messen.

Dichroismus

Von Dirchroismus spricht man, wenn das Material eine Polarisationskomponente bevorzugt absorbiert. Ein Beispiel dafür ist ein Drahtgitter für Mikrowellen, oder Polaroidfilter für Licht, die aus ausgerichteten Polymeren bestehen und sozusagen ein Drahtgitter in klein darstellen.
Da die Absorption richtungsabhängig ist, haben dichroitische Materialien in den absorbierenden Richtungen einen Imaginärteil in der Suszeptibilität.

Doppelbrechung, λ/n-Plättchen und Phasenschieber

Bei der Doppelbrechung gibt es zwei Phasengeschwindigkeiten, je nachdem, ob das elektrische Feld senkrecht (ordentlicher Strahl, befolgt das Snelliussche Brechungsgesetz) oder parallel (außerordentlicher Strahl) zur optischen Achse steht. Für den außerordentlichen Strahl hängt die Brechzahl und damit die Ausbreitungsrichtung vom Einfallswinkel ab.
Bei einem optisch negativen Kristall ist die Phasengeschwindigkeit des ordentlichen Strahls schneller, bei einem opti sch positiven Kristall ist dagegen der außerordentliche Strahl schneller.
Doppelbrechung tritt in anisotropen Medien auf, wobei die Anisotropie nicht im Aufbau des Materials verankert sein muss, sondern auch z.B. durch mechanische Belastung, elektrische oder elektromagnetische Felder, oder, bei Flüssigkeiten, durch Strömung.
Als optische Achse bezeichnet man die Richtung, in der sich Wellen in dem Material wie in einem isotropen Material ausbreiten, die Brechzahlen für den ordentlichen und den außerordentlichen Strahl sind gleich. (Die Differenz der Brechzahlen wird senkrecht zur optischen Achse maximal.) Es gibt optisch einachsige und zweiachsige Kristalle.

Strahlteiler basieren auf diesem Prinzip: Man schickt das Licht auf eine zum Licht schräge Grenzfläche eines doppelbrechenden Materials, der außerordentliche Strahl wird anders gebrochen als der ordentliche.

Bei λ/n -Plättchen liegt die optische Achse parallel zur Oberfläche; die Dicke des Kristalls ist gerade so gewählt, dass durch die unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten nach dem Durchgang die Phasen der Feldkomponenten um den gewünschten Betrag verschoben sind, z.B. $\lambda/2$ (daher der Name Phasenschieber). So kann man beliebige Polarisationszustände erzeugen, mit $\lambda/4$ -

Plättchen kann man z.B. aus linear polarisiertem Licht elliptisch polarisiertes und umgekehrt machen.

Kompensatoren sind regelbare Phasenschieber; sie bestehen aus zwei aufeinander verschiebbaren Keilen, mit denen die Dicke reguliert werden kann.

Optische Aktivität

Als optische Aktivität bezeichnet man, wenn ein Material die Polarisation dreht.

Es gibt optisch aktive Kristalle, die die Polarisationsrichtung proportional zur Materialdicke drehen (z.B. Quarz, 26° pro Millimeter), und zwar in einer rechts- und in einer linksdrehenden Version. Sie unterscheiden sich äußerlich nicht und werden Enantiomorphe genannt. Zirkular polarisiertes Licht wird dadurch, je nachdem, ob der Kristall in die gleiche Richtung oder in Gegenrichtung dreht, schneller oder langsamer, und linear polarisiertes Licht (das man als Linearkombination von rechts- und linkszirkular polarisiertem Licht sehen kann) erfährt dementsprechend eine Nettodrehung.

Bei Quarz besteht die optische Aktivität nur im kristallinen Zustand, nicht als Glas oder im flüssigen Zustand. Aber es gibt auch Stoffe, die auch im flüssigen Zustand die Polarisation drehen (weil nicht ihre Struktur, sondern die Moleküle selbst chiral sind), ein Beispiel ist Zucker. Wie der Name schon sagt, sind die in der Natur vorkommenden Zucker rechtsdrehend; und das kann man z.B. nutzen, um aus der optischen Aktivität einer Lösung den Zuckergehalt zu bestimmen. Ein weiteres Beispiel von optischer Aktivität bei Flüssigkeiten sind nematische Flüssigkristalle in LCD-Anzeigen (die Kristalle sind so angeordnet, dass sie das Licht drehen; wird eine Spannung angelegt, richten sie sich nach dem Feld aus, drehen das Licht nicht mehr, so dass es in den gekreuzten Polfiltern geschluckt wird).

Spannungsdoppelbrechung, Kerr-Effekt, Cotton-Mouton-Effekt, Faraday-Effekt

Durch mechanische Kräfte entstehen nicht-isotrope Verspannungen im Material, die zu Doppelbrechung und damit zur Veränderung der Polarisation führen. So kann man bei transparenten Materialien die Spannungen visualisieren, indem man das Licht mit unveränderter Polarisation mit gekreuzten Filtern herausfiltert.

Auch ein angelegtes elektrisches Feld führt bei isotropen Materialien zu Doppelbrechung, man bezeichnet das als Kerr-Effekt. Die Stärke der Aufspaltung des Brechungsindex hängt über die Kerr-Konstante mit der Wellenlänge und dem Quadrat der elektrischen Feldstärke zusammen. Ähnlich ist der Pockels-Effekt (bei piezoelektrischen Kristallen, proportional zur Feldstärke).
Nutzen kann man den Kerr-Effekt, um mit Hilfe eines elektrischen Feldes Licht zu modulieren (d.h. als schneller Schalter). Weil Licht selbst eine elektromagnetische Welle ist, kann man auch Licht mit Licht modulieren (optischer Transistor); das geht deshalb, weil die Kopplung durch das Medium zustande kommt – das Axiom der geometrischen Optik, dass sich zwei Lichtstrahlen nicht beeinflussen, gilt weiterhin.

Das magnetische Analogon zum Kerr-Effekt ist der Cotton-Mouton-Effekt.

Ein Magnetfeld kann darüber hinaus auch zu optischer Aktivität führen (mit dem elektrischen Feld geht das nicht, „weil sich da nix dreht“), das ist der Faraday-Effekt. Der Drehwinkel ist proportional zur Länge der durchlaufenen Strecke (wie bei optischer Aktivität aufgrund struktureller Chiralität) und zur Feldstärke. Einen Unterschied gibt es zur „normalen“ optischen Aktivität: beim Durchlaufen in Gegenrichtung führt der Faraday-Effekt zu einer Drehung in die gleiche Richtung statt in die Gegenrichtung.

Fresnelsche Formeln

Die Fresnelschen Formeln geben den Zusammenhang zwischen der Intensität von polarisiertem Licht (Polarisation senkrecht bzw. parallel zur Einfallsebene) und dem Einfalls-/Ausfallswinkel an:

$$R_{\perp} = \frac{\sin^2(\theta_{ein} - \theta_{aus})}{\sin^2(\theta_{ein} + \theta_{aus})}$$

$$R_{\parallel} = \frac{\tan^2(\theta_{ein} - \theta_{aus})}{\tan^2(\theta_{ein} + \theta_{aus})}$$

Transmittierte Anteile: $T = 1 - R$.

Für senkrechten Lichteinfall:

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 , T = \frac{4\,n}{(n+1)^2} , n = \frac{n_2}{n_1}$$

***Bemerkung**: An einer Luft-Glas-Grenzfläche werden immer mindestens 4% der Intensität reflektiert. Damit bei optischen Geräten mit mehreren solchen Grenzflächen nicht zu viel verlorengeht, müssen die Gläser entspiegelt werden.*

Geometrische Optik

Wenn der Lichtbündelquerschnitt groß gegen die Wellenlänge des Lichts ist, kann man die Näherungen der geometrischen Optik benutzen, die die Berechnung stark vereinfachen. Dann kann man nämlich Beugungserscheinungen vernachlässigen.

Definition: Die Ausbreitungsrichtung einer Welle ist in isotropen Medien die Normale auf der Phasenfläche. Diese Normalen werden bei Licht als **Lichtstrahlen** bezeichnet.

Definition: Eine abgegrenzte Menge von Lichtstrahlen (z.B. durch Blenden oder Ränder von Spiegeln oder Linsen) durch eine Querschnittsfläche nennt man **Lichtbündel**.

Bemerkung*: Am Rand des Lichtbündels kann es zu Beugungserscheinungen kommen, die man nicht vernachlässigen kann. Faustregel für den Durchmesser von Lichtbündeln:* $\lambda = 0{,}5\ \mu\text{m} \Rightarrow D > 10\ \mu\text{m}$.

Grundaxiome

Fermatsches Prinzip: Licht breitet sich stets so aus, dass es den zeitlich kürzesten Weg zurücklegt. Da in verschiedenen Medien die Ausbreitungsgeschwindigkeit ungleich sein kann, muss dies nicht unbedingt der geometrisch kürzeste Weg sein.

Daraus ergeben sich folgende Grundaxiome der geometrischen Optik:

– Lichtstrahlen verlaufen senkrecht zur Wellenfront der Lichtwelle.

– In einem optisch homogenen Medium sind die Lichtstrahlen Geraden, in einem optisch inhomogenen Medium können sie gekrümmt sein.

– An der Grenzfläche zweier Medien, in denen sich das Licht verschieden schnell ausbreitet, ändert sich die Richtung des Lichtstrahls. Reflexion erfolgt dort nach dem Reflexionsgesetz, Brechung nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz.

– Mehrere Lichtbündel/Lichtstrahlen können sich schneiden und beeinflussen sich dabei nicht gegenseitig (v.a. lenken sich nicht ab). Man kann die Bündel isoliert voneinander betrachten. (Interferenz ist jedoch möglich.)

– Die Richtung der Strahlen ist umkehrbar.

Definitionen:

Lichtbündel: räumliche Gesamtheit von Lichtstrahlen
Lichtbüschel: ebene Gesamtheit von Strahlen, Teilmenge eines Bündels, z.B. durch Ausblendung durch einen Spalt
Divergente Strahlen: gehen von einem Punkt aus
Konvergente Strahlen: laufen in einem Punkt zusammen
Homozentrische Strahlen: Oberbegriff für divergente, konvergente und parallele Strahlen
Diffuse Strahlen: Gegenteil von homozentrischen Strahlen, verlaufen unregelmäßig zueinander

Die optische Abbildung

Definition: Bei einem **reellen Bild** sind die zu den Bildpunkten gehörenden Strahlenbündel konvergent.
Bei einem **virtuellen Bild** sind die zu den Bildpunkten gehörenden Strahlenbündel divergent: sie schneiden sich nicht im Bildpunkt, sondern nur ihre rückwärtigen Verlängerungen (so dass es aussieht, als kämen sie vom Bildpunkt, wenn die Strahlen in gerader Linie verlaufen würden).
Reelle/virtuelle Objektpunkte sind analog definiert.

Bemerkung: *Das menschliche Auge/Gehirn geht von geradlinigen Lichtstrahlen aus. Wahrnehmen kann das Auge nämlich nur nur die Intensität des Lichts, aber nicht, woher es kommt. Die Tatsache, dass die Richtung des Lichts geradlinig extrapoliert wird, macht es möglich, dass man virtuelle Bilder sehen kann.*

Definition: Die **optische Achse** ist die Symmetrieachse optischer Elemente bezüglich Drehungen; z.B. die Verbindungslinie der Krümmungsmittelpunkte der brechenden Flächen eines optischen Systems.
Fallen die optischen Achsen aller optischen Elemente zusammen, spricht man von einem **zentrierten System**.

Definition: Der Punkt, in dem sich all jene Strahlen scheiden, die auf der anderen Seite des optischen Elements parallel verlaufen, heißt **Brennpunkt** (Objektbrennpunkt und Bildbrennpunkt).
Der Abstand zwischen den jeweiligen Hauptpunkten und Brennpunkten heißt **Brennweite** (gegenstandsseitige und bildseitige Brennweite).

Definition: Die Entfernung zwischen dem Lot eines Objektpunkts auf die optische Achse und der Objekthauptebene heißt **Gegenstandsweite**. Analog: **Bildweite**.

Konvention zur geometrischen Bildkonstruktion

- Lichtstrahlen verlaufen immer von links nach rechts. Strecken in x-Richtung werden in Lichtrichtung positiv, in entgegengesetzter Richtung negativ gezählt.
- Die y-Richtung zählt nach oben positiv.
- Der Krümmungsradius wird positiv gezählt, wenn der Krümmungsmittelpunkt rechts vom Scheitel liegt.
- **Konjugierte Größen** (d.h. Größen, die im Objekt- und im Bildraum einander entsprechen) erhalten gleiche Buchstaben. Die Größen im Bildraum werden durch einen Strich gekennzeichnet (z.B. F'). Werden zwei konjugierte Größen nicht ineinander abgebildet, so erhält die objektseitige Größe außerdem einen Querstrich (z.B. $\bar{F}$).
- Winkel werden im Gegenuhrzeigersinn positiv gezählt.

Beispiele von optischen Abbildungen

Der **ebene Spiegel** ist das einzige optische Element, das jeden Punkt P des Raumes in einen anderen Punkt P' abbildet. Jeder Punkt vor dem Spiegel wird auf einen virtuellen Bildpunkt hinter dem Spiegel abgebildet; dieser virtuelle Bildpunkt ist die Verlängerung der reflektierten Strahlen hinter die Spiegelebene.

Ein **elliptischer Spiegel** bildet nur die beiden Brennpunkte ineinander ab, ein **Kugelspiegel** nur den Mittelpunkt in sich.

Mit einer **Lochblende** mit dem Durchmesser d kann man näherungsweise einen Punkt auf einen anderen abbilden, wenn der Lochdurchmesser klein genug ist:

$$d' = \frac{a+b}{a}\, d$$

(a Gegenstandsweite, b Bildweite, d' Durchmesser des Kreises, auf den der Punkt abgebildet wird).
Man kann den Lochdurchmesser aber nicht beliebig klein machen, weil dann wieder Beugungserscheinungen auftreten (wenn die Größe des Beugungsmaximums größer als der Bilddurchmesser wird), d.h. der optimale Durchmesser ist:

$$d_{opt} = \sqrt{\frac{a \cdot b}{a+b}\, 2\,\lambda}\ .$$

Man verwendet zur Abbildung aber meist Linsen oder Hohlspiegel, weil sie lichtstärker sind (d.h. größere Öffnungen erlauben) und das Bild in jeder passenden Entfernung erzeugen können.

Bei **sphärischen Hohlspiegeln** schneiden sich paraxiale Strahlen (d.h. nahe bei der Symmetrieachse) annähernd in einem Punkt $\Rightarrow$ die Brennweite beträgt dann $1/2\ R$, und nimmt mit zunehmendem Abstand von der Symmetrieachse ab. Ist der Einfallswinkel $\alpha = 60\ °$, ist der Brennpunkt auf der Spiegeloberfläche.

Parabolspiegel: Im Gegensatz zum sphärischen Hohlspiegel schneiden sich hier *alle* parallel einfallenden Strahlen im Brennpunkt. Durch geometrische Konstruktion kann man ermitteln:

$$x = \frac{1}{4\ f}\ y^2\ .$$

Für sphärische Spiegel gilt $x = R - \sqrt{R^2 - y^2}$, diese Wurzel kann für $y^2 < R^2$ entwickelt werden

$$x = \frac{y^2}{2\ R} + \frac{y^4}{8\ R^3} + \ldots$$

für achsennahe Strahlen $y \ll R$ kann man die höheren Glieder weglassen, es ergibt sich:
Ein sphärischer Spiegel mit Radius R wirkt in der paraxialen Näherung wie ein Parabolspiegel mit $f = R/2$.

Definition: In der **paraxialen Näherung** bilden die Strahlen mit der optischen Achse einen so kleinen Winkel, dass man die Kleinwinkelnäherung $\alpha \approx \sin\ \alpha \approx \tan\ \alpha$ anwenden kann. Strahlenoptik im Paraxialgebiet heißt **Gaußsche Optik**.

Prismen

Ein Prisma hat als Querschnittsfläche ein gleichschenkliges Dreieck; beim Durchgang wird der Lichstrahl zweimal gebrochen

Für den Ablenkwinkel δ in Abhängigkeit vom Prismenwinkel γ (zwischen den gleichen Schenkeln) und den Einfalls-/Ausfallswinkeln α_1, α_2 gilt: $\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma$. δ liegt so, dass der Lichstrahl sozusagen „um das dicke Ende des Prismas (gegenüber dem Prismenwinkel) herumgebrochen wird“.

Beim symmetrischen Strahlengang mit $\alpha_1 = \alpha_2$ (dann ist der Strahlengang im Prisma parallel zu der Basis des Prismas) ist die Ablenkung δ am kleinsten; es gilt: $\delta_{min} = 2\,\alpha - \gamma$.

Mit Hilfe des Brechungsgesetzes erhält man:

$$\frac{\mathrm{d}\,\delta}{\mathrm{d}\,\lambda} = \frac{2\sin(\lambda/2)}{\sqrt{1-n^2\sin^2(\lambda/2)}}\frac{\mathrm{d}\,n}{\mathrm{d}\,\lambda}$$

Definition: Die Abhängigkeit der Brechzahl von der Wellenlänge, $\mathrm{d}\,n/\mathrm{d}\,\lambda$, nennt man **Dispersion**.

Bemerkung*: Für die meisten durchsichtigen Materialien gilt im Bereich des sichtbaren Lichts:* $\mathrm{d}\,n/\mathrm{d}\,\lambda < 0$ *, d.h. blaues Licht wird stärker gebrochen als rotes Licht (vgl. Regenbogen). Man spricht dann von* ***normaler Dispersion****, andernfalls von* ***anomaler Dispersion****. Aber die* ***Dispersionskurve*** *ist nicht linear.*

Das Auflösungsvermögen eines Prismas hängt von der Dispersion und der Basislänge ab (je größer die Dispersion, desto genauer kann man zwei Linien voneinander unterscheiden, aber desto eingeschränkter ist der Bereich, den man beobachten kann):

$$\frac{\lambda}{\Delta\,\lambda} = b\left|\frac{\mathrm{d}\,n}{\mathrm{d}\,\lambda}\right|$$

Linsen

Analog zu sphärischen Hohlspiegeln kann man bei sphärisch gekrümmten Grenzflächen für achsennahe Strahlen folgende Näherung machen (der Brennpunkt mit f_2 liegt auf der Seite des gekrümmten Mediums mit der Brechzahl n_2):

$$f_2 = \left(\frac{n_2}{n_2 - n_1}\right) R$$

Diese Formel gilt auch für die Brennweite im anderen Medium, wenn man im Nenner die entsprechende Brechzahl einsetzt. Die Herleitung beider Fälle ist im Demtröder anschaulich beschrieben.

Konstruktion eines Bildes: Für jeden Punkt muss man mindestens zwei Strahlen zeichnen. Auf der Objektseite achsenparallele Strahlen gehen auf der Bildseite durch den Brennpunkt, durch den objektseitigen Brennpunkt gehende Strahlen verlaufen auf der Bildseite achsenparallel, und Strahlen durch den Krümmungsmittelpunkt (bei dünnen Linsen: durch den Linsenmittelpunkt) werden nicht gebrochen, sie sind auf Objekt- und Bildseite gleich.

Die optische Abbildung durch eine Linse entspricht den aufeinanderfolgenden Abbildungen durch die beiden gekrümmten Grenzflächen. So kann man sich die Wirkung verschiedener Linsentypen (bikonvex, bikonkav, plan-konvex, plan-konkav, konvex-konkav usw.) herleiten.
Konkret: Der Bildpunkt, in den ein Objektpunkt durch die erste Grenzfläche abgebildet wird, dient als Objektpunkt für die zweite Grenzfläche; ihr Bildpunkt ist der Bildpunkt der Linse.

Das Gleiche gilt für Linsensysteme; dort dient ein **Zwischenbild**, das das von der einen Linse erzeugte Bild ist, der nächsten Linse als Urbild.

Dünne Linsen

Definition: Eine Linse, bei der der maximale Abstand der beiden Grenzflächen klein gegen die Brennweiten ist, nennt man **dünne Linse**.
Bei der Bildkonstruktion ersetzt man die Brechung an den Grenzfläche durch eine Brechung an der Mittelebene.

Brennweite einer dünnen Linse:

$$f = \frac{1}{n-1}\left(\frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1}\right)$$

Abbildungsgleichung für dünne Linsen:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f};$$

Wenn ein zur optischen Achse nicht paralleler Lichtstrahl durch den Linsenmittelpunkt geht, erfährt er eine Parallelverschiebung (er wird an beiden Grenzflächen gebrochen, so dass er insgesamt nicht abgelenkt wird; aber im Linseninneren verläuft er sehr wohl abgelenkt, so dass er etwas versetzt die Linse verlässt), die man für dünnen Linsen vernachlässigt (da $d \to 0$). Die Parallelverschiebung ist: $\Delta = d \sin\alpha \left(1 - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right)$.

Diesen Punkt, durch den alle Strahlen verlaufen, die nicht abgelenkt, sondern nur vertikal versetzt werden, nennt man **optischen Mittelpunkt** der Linse.

Newtonsche Abbildungsgleichung:

$$x_a \cdot x_b = f^2$$

mit $a = f + x_a$, $b = f + x_b$

Definition: Als **Abbildungsmaßstab** bzw. **Lateralvergrößerung** bezeichnet man das Verhältnis der Bild- zur Objektgröße:
$M = \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a} = \frac{f}{f-a}$ (nach Strahlensatz).

***Bemerkung**: Ist der Abbildungsmaßstab $M < 0$, dann steht das Bild auf dem Kopf, ansonsten hat es die gleiche Orientierung. Es ergibt sich, dass $M < 0$ für $a > f$ gilt.*
Für $a = 2f$ wird $M = -1$, d.h. das Bild ist gleich groß wie das Objekt, für $a = f$ wird die Bildgröße und damit der Abbildungsmaßstab unendlich.

Dicke Linsen

Definition: Linsen, bei denen der Abstand der Grenzflächen nicht mehr vernachlässigbar gegen die anderen Größen a, b, f ist, bezeichnet man als **dicke Linsen**.
Bei der Bildkonstruktion ersetzt man die Brechung an den Grenzflächen durch Brechung an den beiden **Hauptebenen** ersetzt (d.h. die Linse wird durch zwei dünne Linsen an den Hauptebenen ersetzt); die Hauptebenen liegen so, dass die Strahlen zwischen ihnen parallel zur optischen Achse verlaufen.
Die Schnittpunkte der Hauptebenen mit der optischen Achse heißen **Hauptpunkte** der Linse. Man unterscheidet **Gegenstandshauptpunkt** und **Bildhauptpunkt**.

Faustregel für Glaslinsen in Luft: Der Abstand zwischen den Hauptebenen beträgt etwa 1/3 der Scheiteldicke der Linse.

Durchbiegung einer Linse: Als **Durchbiegung** bezeichnet man die Tatsache, dass man bei vorgegebener Brennweite und Brechzahl des Linsenmaterials zum Krümmungsradius auf der einen Seite immer einen Krümmungsradius auf der anderen Seite und eine Mittendicke so finden kann, dass die Vorgaben erfüllt werden. In der praktischen Anwendung kann man so die Linsen so konstruieren, dass z.B. Abbildungsfehler minimiert werden. Die Hauptebenen können dabei komplett aus der Linse herauswandern.

Linsensysteme

Der Bildpunkt der ersten Linse eines Linsensystems ist Objektpunkt für die zweite Linse; deren Bildpunkt ist der Bildpunkt des Linsensystems. Aus der Newtonschen Abbildungsgleichung mit eingesetzter Objekt- und Bildweite ergibt sich:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{d}{f_1\, f_2}\,.$$

Definition: Die reziproke Brennweite $D^*=1/f$ einer Linse heißt **Brechkraft**. Sie wird in Dioptrien gemessen ($1\ \mathrm{dp}=1\ \mathrm{m}^{-1}$).

Für nahe benachbarte (d.h. $d \ll f_1$, f_2) und auf die gleiche Symmetrieachse zentrierte Linsen in einem optischen System kann man den letzten Term obiger Gleichung vernachlässigen. $\Rightarrow$ Die Brechkräfte zweier nahe benachbarter Linsen addieren sich.

Zoom-Linsensysteme bestehen aus mindestens drei Linsen. Die mittlere Linse kann bewegt werden, durch die Veränderung des relativen Abstandes der Linsen kann so die Brennweite des Systems eingestellt werden, ohne Objekt- oder Bildebene ändern zu müssen.

Linsenfehler

Alle abbildenden Elemente außer dem ebenen Spiegel haben Abbildungsfehler, die meist in paraxialer Näherung vernachlässigt werden können.

– **Chromatische Aberration**: Weil das Linsenmaterial eine Dispersion besitzt, werden verschiedene Farben verschieden abgebildet, ihre Brennpunkte sind an verschiedenen Stellen. Die Brennweite einer Linse ist daher meist auf die gelbe Natriumlinie ($\lambda=590\ \mathrm{nm}$) bezogen (um verschiedenfarbiges Licht mit Linsen verschiedener Brechzahl in den gleichen Punkt abzubilden: die Brechzahl für gelbes Licht ist annähernd in der Mitte zwischen den Brechzahlen für rotes und blaues Licht).
  Man kann die chromatische Aberration durch einen **Achromaten** verringern, das ist ein System

von zwei oder mehr Linsen (Sammel- und Zerstreuungslinsen) aus verschiedenen Materialien.

- **Sphärische Aberration**: Achsenferne Strahlen werden in der Linse stärker gebrochen als achsennahe Strahlen. (Die Abweichung hängt vom Abstand von der optischen Achse, dem Krümmungsradius der Linse und dem Objektabstand ab.)
  Faustregel: Um eine minimale sphärische Aberration zu erhalten, muss bei einer plan-konvexen Linse die gekrümmte Fläche auf der Seite sein, auf der die Lichtstrahlen einen kleineren Öffnungswinkel haben.
  Oder: Mit einer Blende die achsenfernen Strahlen ausblenden (man verliert Intensität), oder mit einem sphärisch korrigierten Linsensystem, oder mit aufwändigen nicht-sphärisch geschliffenen Linsen.
- **Koma**: Dabei ist die Linse gegenüber der Richtung der Lichtstrahlen gekippt. Die **Fokalpunkte** (das sind die Schnittpunkte benachbarter Strahlen) befinden sich nicht mehr auf der optischen Achse, sie liegen in verschiedenen Ebenen. Der Effekt wird besonders deutlich, wenn man die zentrale Linsenfläche abdeckt.
- **Astigmatismus**: Dieser Abbildungsfehler tritt auf, wenn ein schräges Lichtbündel durch die Linse geht. Die Strahlen in der horizontalen Schnittebene (Sagittalebene) haben ihren Brennpunkt an einer anderen Stelle als die Strahlen in der senkrechten Schnittebene (Meridionalebene). Besonders ausgeprägt ist der Astigmatismus bei Zylinderlinsen; ein Punkt wird dabei in einen Strich parallel zur Zylinderachse abgebildet.
- **Bildfeldwölbung und Verzeichnung**: Wegen unterschiedlich starker Brechnung von Lichtstrahlen, die unter verschiedenen Winkeln durch die Linse gehen, ist das Bildfeld gekrümmt. Wegen astigmatischer Fehler erhält man für sagittale und meridionale Strahlen verschiedene Bildfelder.
  [Verzeichnung: Tonnen- und Kissenverzeichnung; aplanatische Abbildung]

Matrixmethoden der geometrischen Optik

Einen Lichtstrahl kann man beschreiben durch seinen Winkel und seinen Abstand zur Symmetrieachse. Als Vektor geschrieben, kann man Abbildungen auf diesen Lichtstrahl durch Abbildungsmatrizen beschreiben, die mit dem Lichtstrahl-Vektor multipliziert werden:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \tilde{M} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ r_0 \end{pmatrix} .$$

- Translationsmatrix:
  $$\tilde{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix}$$
- Brechungsmatrix:
  $$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{n_2 - n_1}{n_2\, R} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  n_2 : Brechzahl des Mediums mit der gekrümmten Oberfläche (z.B. Linse)
  R : Krümmungsradius dieses Mediums
- Reflexionsmatrix:

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{R} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R : Krümmungsradius der reflektierenden Oberfläche

Die Transformation eines Lichtstrahls kann man dann durch hintereinander ausgeführte Matrizenmultiplikation beschreiben, oder gleich eine dazu äquivalente Transformationsmatrix erstellen. Um z.B. die Abbildung durch eine Linse zu beschreiben, hat die Abbildungsmatrix folgende Form: $\tilde{M}_{AB} = \tilde{T}_2 \, \tilde{M}_L \, \tilde{T}_1$. Dabei ist $\tilde{T}_1$ die Translationsmatrix, die den Lichtstrahl vom Objektpunkt über die Entfernung a zur Linse verschiebt, $\tilde{T}_2$ analog die Translationsmatrix, die den Lichtstrahl um die Entfernung b verschiebt, und $\tilde{M}_L$ die Abbildungsmatrix der Linse.

Die Berechnung mit Matrizen funktioniert nur für die paraxiale Näherung (achsennahe Lichtstrahlen), kann dann jedoch bei komplizierten Linsensystemen die Rechnung stark vereinfachen.

Interferenz und Beugung

Aus der Linearität der Wellengleichung folgt, dass jede Linearkombination von zwei Lösungen ebenfalls eine Lösung ist. Daher muss man, um das Wellenfeld in einem bestimmten Raumpunkt zu erhalten, alle sich dort überlagernden Teilwellen addieren (Superpositionsprinzip). Diese Überlagerung von Teilwellen heißt **Interferenz**. Wenn räumliche Begrenzungen des Wellenfeldes einen Teil der interferierenden Teilwellen untterdrücken, führt diese **unvollständige Interferenz** zu Beugungserscheinungen.

Kohärenz

Definition: Wenn sich die Phasendifferenz zwischen beliebigen Teilwellen an einem Raumpunkt während der Beobachtungsdauer Δt um weniger als 2π ändert, nennt man die Teilwellen **zeitlich kohärent**.
Die maximale Zeitspanne Δt_c, während der sich die Phasendifferenz um maximal 2π ändert, heißt **Kohärenzzeit**.

Erklärung: Wenn sich zwei Teilwellen mit verschiedenen Frequenzen überlagern, haben sie eine zeitlich veränderliche Phasendifferenz ($\Delta\varphi(t)=2\pi\cdot\Delta f\cdot t$). Während der Kohärenzzeit wächst sie bis auf 2π an, es ergibt sich: $\Delta t_c=1/\Delta f$. Andere Teilwellen mit geringerem Frequenzunterschied zur ersten Teilwelle ändern ihre Phasendifferenz zu ihr langsamer, daher sind sie während der Kohärenzzeit (der ersten beiden Teilwellen) auch zeitlich kohärent. Man kann also sagen: Die Kohärenzzeit einer Lichtwelle ist der Kehrwert ihrer spektralen Frequenzbreite.
Die Überlagerung aller Teilwellen führt zu einem zeitlich abklingenden Wellenzug, der nach der Kohärenzzeit auf $1/e$ seiner Anfangsamplitude abgeklungen ist.

Definition: Wenn sich die Phasendifferenz einer beliebigen Teilwelle an verschieden Raumpunkten während der Beobachtungsdauer Δt um weniger als 2π ändert, nennt man das Wellenfeld **räumlich kohärent**.
Die zur Ausbreitungsrichtung der Welle senkrechte Fläche, zwischen deren Punkten die Phasendifferenz der Welle gleich Null ist, heißt **Kohärenzfläche**.

Definition: Die Strecke, die das Licht während der Kohärenzzeit zurücklegt, wird als **Kohärenzlänge** bezeichnet.
Das Produkt aus Kohärenzfläche und Kohärenzlänge heißt **Kohärenzvolumen**.

Interferenz tritt immer auf, sobald sich mehrere Teilwellen überlagern. Aber damit man diese Interferenzerscheinungen beobachten kann, dürfen sich die Phasendifferenzen nicht zeitlich ändern. Daher können Interferenzerscheinungen nur innerhalb des Kohärenzvolumens beobachtet werden.

Beispiele von Interferenz

[Youngscher Doppelspalt]

Interferenz an einer planparallelen Platte

Sie tritt auf, weil ein Teil der Welle an den Oberflächen gebrochen und ein Teil reflektiert wird. Man kann zwei Fälle unterscheiden (angenommen, das Licht trifft von oben auf die Platte):

– Eine Teilwelle wird an der ersten Oberfläche reflektiert, eine weitere Teilwelle wird an dieser Oberfläche gebrochen, an der zweiten Oberfläche reflektiert, und wieder an der ersten Oberfläche gebrochen; nun sind die beiden Teilwellen parallel, über der ersten Oberfläche gibt es

Interferenz.

– Die Welle wird an der ersten Oberfläche gebrochen; an der zweiten Oberfläche wird eine Teilwelle gebrochen und eine zweite Teilwelle reflektiert, dann an der ersten Oberfläche reflektiert und erst dann an der zweiten Oberfläche gebrochen. Interferenz tritt unterhalb der zweiten Oberfläche auf.

[Phasensprung um Pi]

Michelson-Interferometer

Ein Michelson-Interferometer besteht aus einem Strahlteiler und zwei Spiegeln. Ein Teilstrahl passiert den Strahlteiler, wird am Spiegel zurückreflektiert und dann am Strahlteiler um 90° auf den Beobachtungsschirm reflektiert (der nach der Reflexion am Spiegel durch den Strahlteiler zur Lichtquelle zurückgehende Teilstrahl interessiert nicht). Der zweite Teilstrahl wird am Strahlteiler um 90° auf die dem Beobachtungsschirm gegenüberliegende Seite reflektiert, dort von einem Spiegel zurückreflektiert und trifft dann auf den Beobachtungsschirm, nachdem er den Strahlteiler passiert hat (der zurück auf die Lichtquelle reflektierte Anteil interessiert nicht). Beide auf den Beobachtungsschirm treffenden Teilstrahlen haben die gleiche Intensität unabhängig vom Transmissions-/Reflexionsvermögen des Strahlteilers, weil jeder Teilstrahl einmal transmittiert und einmal reflektiert wird.
Mit dem Michelson-Interferometer kann man kleine Längenänderungen messen, weil sich das Verschieben eines Spiegels in der Veränderung des Interferenzmusters äußert (man kann die Verschiebung der Intensitätsmaxima zählen und so Entfernungen im Bereich der verwendeten Lichtwellenlängen messen). Um die Empfindlichkeit zu erhöhen, kann man die Teilstrahlen mehrfach zwischen festen und beweglichen Spiegel reflektieren, so dass sich jede Längenänderung als Vielfaches im Gangunterschied der Teilwellen niederschlägt.

[Michelson-Morley-Experiment]

Sagnac-Interferometer

Das Sagnac-Interferometer besteht aus einem Strahlteiler und drei Spiegeln, an denen der Strahl dreimal um 90° reflektiert wird, bis er wieder zurück am Strahlteiler ankommt, und dann auf den Beobachtungsschirm (rechtwinklig zur Lichtquelle) fällt. Die beiden Teilstrahlen (je nachdem sie den Strahlteiler passiert haben oder reflektiert wurden) durchlaufen den Weg gegenläufig, und erreichen danach (nachdem sie den Strahlteiler passiert haben oder an ihm reflektiert wurden) den Schirm.
Mit einem solchen Interferometer (im großen Maßstab, die Fläche innerhalb des Lichtwegs betrug 20105 m²) maßen Michelson und Gale 1925 die Erdrotation. Mit der heute möglichen Empfindlichkeit kann man dies in kleinerem Maßstab realisieren, und somit aus drei aufeinander senkrecht stehenden Sagnac-Interferometern Laserkreisel zur Navigation bauen.

Mach-Zehnder-Interferometer

Hier durchläuft eine der Teilwellen ein zu messendes Medium mit bekannter Länge. So lässt sich z.B. der Brechungsindex von Gasen messen, deren Druck man kontinuierlich ändert. Aus der Veränderung der Phasendifferenz kann man bei bekannter Länge des Gasbehälters und bekannter Lichtwellenlänge auf den Brechungsindex schließen.

Dielektrische Spiegel

Metallspiegel haben ein relativ hohes Absorptionsverhalten, so dass man im sichtbaren Spektralbereich nur Reflexionswerte bis zu $R = 0{,}95$ erreichen kann. Um höhere Reflexionswerte zu erreichen, baut man Spiegel aus vielen dünnen Schichten mit unterschiedlichen Brechzahlen; an jeder Grenzfläche wird ein Teil des Lichts reflektiert. Diese Spiegel sind auf eine bestimmte Wellenlänge optimiert, so dass zwischen an verschiedenen Schichten reflektierten Strahlen konstruktive Interferenz auftritt. Dabei muss beachtet werden, dass bei Grenzflächen vom optisch dünneren zum optisch dichteren Medium ein Phasensprung von π auftritt, vom optisch dichteren zum optisch dünneren Medium jedoch nicht. Mit diesem Spiegeln erreicht man Reflexionswerte von bis zu 99,995% mit 15-20 Schichten.

Antireflexschicht

Eine Antireflexschicht funktioniert genau gegenteilig wie ein dielektrischer Spiegel. Die Beschichtung ist so gewählt, dass destruktive Interferenz zwischen dem an den verschiedenen Schichten reflektierten Licht auftritt.

Beugung

Beugungserscheinungen treten auf, wenn die Strukturgröße des Elements in der gleichen Größenordnung wie die Lichtwellenlänge liegt. Daher ist man erst seit wenigen Jahrzehnten in der Lage, diffraktive optische Elemente zu bauen. Beugung tritt bei Transmission als auch bei Reflexion auf, daher ist z.B. ein Beugungsspalt äquivalent zu einer entsprechend spaltförmig begrenzten Spiegelfläche.

Kann man das einfallende Licht näherungsweise als parallel betrachten, spricht man von **Fraunhofer-Beugung**. Ist das nicht der Fall, sondern das Licht konvergent oder divergent, spricht man von **Fresnel-Beugung**.

Beugung am Spalt

Innerhalb des Spalts ändert sich die Feldstärke der einfallenden Welle, wodurch Sekundärwellen entstehen. Es geht also von jedem Punkt im Spalt eine Kugelwelle aus, und diese Kugelwellen interferieren miteinander – man kann sich einen Spalt als ein optisches Gitter vorstellen, bei dem von jedem Spalt eine Kugelwelle ausgeht, und bei dem die „Gitterstäbe“ fehlen.
Ist z.B. bei einem bestimmten Beugungswinkel eines Lichtbündels der Wegunterschied zwischen den Lichtstrahlen auf den beiden Seiten des Lichtbündels genau eine Wellenlänge, so kann man sich das Lichtbündel als zwei Teilbündel vorstellen, die sich beide gegenseitig auslöschen (der erste Lichtstrahl des ersten Bündels und der erste Lichtstrahl des zweiten Bündels haben einen Wegunterschied von genau einer Wellenlänge, ebenso die zweiten, dritten... Strahlen). Ist der Wegunterschied ein ungerades Vielfaches von $\lambda/2$, dann bleibt ein Lichtbündel übrig (Nebenmaximum). Wird die Spaltbreite kleiner als die Wellenlänge, so gibt es keinen Wegunterschied zwischen Teilbündel, die zu destruktiver Interferenz führen: das Hauptmaximum füllt dann den gesamten Bereich hinter dem Spalt aus.

Zusammengefasst:

- Ist der Spalt breiter als die Wellenlänge, gibt es ein Hauptmaximum mit der Breite $\Delta\theta = 2\lambda/b$ (Kleinwinkelnäherung, Gangunterschied ist auf beiden Seiten eine Wellenlänge) und Nebenmaxima bei $\theta_m = \pm(2m+1)\lambda/(2b)$.
- Ist der Spalt schmäler als die Wellenlänge, dann füllt das Hauptmaximum den gesamten Bereich hinter dem Spalt aus ($-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$).

Für die Lichtintensität gilt für Beugung an einer Blende mit Radius R:

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{2\ J_1(x)}{x} \right)^2 \text{ mit } x = \frac{2\ \pi\ R}{\lambda} \sin\ \theta$$

(J_1 ist die Besselfunktion erster Ordnung.)

Beugungsgitter

Bei einem Beugungsgitter bestimmen in erster Näherung die Einzelspalte die Lichtbündel, die miteinander interferieren, so dass von jedem Einzelspalt eine näherungsweise Kugelwelle ausgeht. Aber in Wirklichkeit tritt an jedem Einzelspalt (da die Spaltbreite gegenüber der Lichtwellenlänge normalerweise nicht vernachlässigbar klein ist) außerdem noch Beugung auf.

Interferenz zwischen den Lichtbündel der Spalte:
Hauptmaxima treten auf, wo $\Delta\ s = d \cdot \sin\ \theta = m\ \lambda$ (d: Spaltabstand) erfüllt ist. Da der Sinus maximal 1 werden kann, ist die höchste Ordnung festgelegt durch $m_{max} = d/\lambda$.
Zwischen zwei Hauptmaxima liegen bei N Spalten $N-2$ Nebenmaxima bei

$$\sin\ \theta_p = \frac{(2\ p+1)\ \lambda}{2\ N\ d} \qquad (p = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ N-2)\ .$$

Intensitätsverteilung durch Beugung an jedem Spalt: Diese Intensitätsverteilung hat den gleichen Verlauf wie bei einem Einzelspalt. Bei kleiner Spaltbreite ist die Kurve der Beugungsverteilung die Einhüllende der Interferenzmaxima; so kann es durchaus sein, dass Interferenzmaxima „fehlen", weil sie genau in Minima der Beugungsverteilung fallen.

Die Gesamtintensität bei Beugung am Gitter kann man durch folgende Formel beschreiben:

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 [\pi\ (b/\lambda) \sin\ \theta]}{[\pi\ (b/\lambda) \sin\ \theta]^2} \frac{\sin^2 [N\ \pi\ (d/\lambda) \sin\ \theta]}{\sin^2 [\pi\ (d/\lambda) \sin\ \theta]}\ .$$

Dabei beschreibt der erste Faktor die Beugung am Einzelspalt, und der zweite Faktor die Interferenz zwischen N Spalten.

[Fresnelsche Zonen]

Fresnel-Zonenplatte und Fresnel-Zonenlinse

Eine **Fresnel-Zonenplatte** besteht aus konzentrischen durchsichtigen und undurchsichtigen Ringen, die nach außen hin dünner werden. Die Ringe sind so angeordnet, dass für kohärentes Licht, das parallel einfällt, der Gangunterschied für die einzelnen Ringe so ist, dass sich das Licht um jeweils eine Wellenlänge unterscheidet, wenn es in den Brennpunkt gebeugt wird; dort gibt es ein Intensitätsmaximum wegen konstruktiver Interferenz. Die Zonenplatte wirkt also fokussierend. Die Lichteffizienz ist gering (50% Verlust an den undurchsichtigen Ringen, Verlust bei höheren Beugungsordnungen), aber für manche Bereiche, für die es keine brechenden Materialien für normale Linsen gibt (z.B. Röntgenstrahlen: in diesem Wellenlängenbereich sind die normalen Glas- oder Quarzlinsen zu „undurchsichtig", außerdem ist ihr Brechungsindex hier annähernd 1), sind sie von Bedeutung.

Für den Radius des n-ten Ringes gilt:

$$r_n = \sqrt{(f + n \cdot \lambda)^2 - f^2} = \sqrt{f^2 + 2 \cdot f\ n\ \lambda + n^2\ \lambda^2 - f^2} \approx \sqrt{2\ f\ n\ \lambda} \qquad \text{für } \lambda \ll f$$

Eine **Fresnel-Zonenlinse** ist eine Linse, die sozusagen an parallelen Ebenen senkrecht zur optischen Achse zerschnitten wurde und „überflüssiges Material" entfernt wurde, so dass nur noch die gekrümmten Ringe übrig sind, die ineinandergesetzt werden. Die Abbildungsqualität ist aber im Allgemeinen schlecht, weil jetzt die (zeitlichen) Lichtwege unterschiedlich lang sind (bei einer normalen Linse wird der kürzere geometrische Weg eines Strahls näher an der optischen Achse

durch einen längeren Weg durch das Linsenmaterial mit höherem Brechungsindex und damit niedrigerer Lichtgeschwindigkeit kompensiert). Daher wird die Zonenlinse dort eingesetzt, wo es bei großen Linsen auf Gewichtsersparnis ankommt (z.B. Linsen im Leuchtturm) oder flache Linsen benötigt werden (z.B. Kollimator im Overheadprojektor).
Für kohärentes Licht kann man den optischen Wegunterschied von Ring zu Ring gerade so wählen, dass er ein Vielfaches der Wellenlänge ist; so interferieren die Strahlen außerdem konstruktiv im Brennpunkt. Die Zonenlinse dann kein nur brechendes optisches Element mehr, sondern arbeitet sowohl mit Brechung als auch Beugung!

[Hologramme (Stöcker):
Das Regenbogenhologramm auf Kreditkarten ist ein Reflexionshologramm. Eine Änderung des Blickwinkels nimmt man nur wahr, wenn man den Kopf horizontal bewegt. Die andere Richtung (oben - unten) wurde geopfert, um das Licht in seine spektralen Anteile zu zerlegen. Man erkennt dies um so besser, je länger die Kohärenzlänge der verwendeten Lichtquelle ist (je kleiner und weiter entfernt diese ist). Gut geeignet sind z.B. Niedervolt-Halogenlampen. Diese Reflexionshologramme werden allerdings nicht fotografisch aufgenommen, es sind computergenerierte Hologramme.]

[Beugungsbild als Fouriertransformation des Beugungsobjekts]

[Prismen/Gitterspektroskope: im Allgemeinen haben Gitterspektroskope eine höhere Auflösung, Prismenspektroskope decken einen größeren Bereich ab; Reflexionsgitterspektroskope haben eine größere Lichtstärke als Transmissionsgitterspektroskope;]

Optische Instrumente

Optische Elemente unterscheidet man in folgende Gruppen

- **Refraktive Elemente** sind Elemente, die auf Brechung beruhen, z.B. Linsen.
- **Reflektive Elemente** beruhen auf Reflexion, z.B. Hohlspiegel.
- **Diffraktive Elemente** beruhen auf Beugung, z.B. Hologramme oder Fresnel-Zonenplatten.

Definition: Das Verhältnis B/G der Bildgröße zur Objektgröße heißt **Abbildungsmaßstab**.

Definition: Das Verhältnis $V = \varepsilon / \varepsilon_0$ des Sehwinkels mit Instrument (d.h. der Winkel, unter dem man das Objekt sieht, wenn man durch das Instrument blickt) zum Sehwinkel ohne Instrument (d.h. der Winkel, unter dem man das Objekt sieht, wenn es in der deutlichen Sehweite s_0 vom Auge entfernt ist) heißt **Winkelvergrößerung**:
Der Mindestabstand, bei dem ein (nicht fehlsichtiger) Mensch einen Gegenstand ohne Anstrengung scharf sehen kann, beträgt etwa 25 cm. Man nennt daher $s_0 = 25\text{ cm}$ die **deutliche Sehweite**.

***Bemerkung**: Der Sehwinkel hängt durch* $\varepsilon = \arctan(0{,}5 \cdot G/g)$ *mit der Gegenstandsgröße/-weite zusammen, daher ist die Winkelvergrößerung im Allgemeinen nicht gleich dem Abbildungsmaßstab.*
Der minimale Sehwinkel, der für das Auge gerade noch auflösbar ist, beträgt etwa eine Bogenminute.

Definition: Man nennt den Bereich, in dem man, wenn sich das Objekt darin befindet, einen Objektpunkt in ein Bildscheibchen abbildet, das kleiner als die kleinste vom Auge noch auflösbare Fläche ist, **Schärfentiefe** des optischen Instruments.

Der Schärfentiefebereich hängt vom Durchmesser der Linse (bzw. Blende) ab: nach dem Strahlensatz ergibt sich mit der Bildweite b_v (für einen Punkt, der (von der Linse aus gesehen) hinter der Bildebene scharf abgebildet wird):

$$\frac{u}{D_B} = \frac{b_v - b_0}{b_v}$$

(u : maximaler Durchmesser des Bildscheibchens, D_B : Durchmesser der Blende, b_0 : Bildweite für einen Punkt, der in der Bildebene scharf abgebildet wird).
Analog mit einem Punkt, der vor der Bildebene (in der Bildweite b_h) scharf abgebildet wird und in der Bildebene in ein Bildscheibchen abgebildet wird:

$$\frac{u}{D_B} = \frac{b_h - b_0}{b_h}$$

Mit der Linsengleichung ergibt sich damit:

$$\Delta\, a_v = a_0 - a_v = \frac{b_0\, f^2\, u}{(b_0 - f)\,(D_B\, b_0 - D_B\, f + u\, f)}$$ und

$$\Delta\, a_h = a_h - a_0 = \frac{b_0\, f^2\, u}{(b_0 - f)\,(D_B\, b_0 - D_B\, f - u\, f)}$$

Der Schärfentiefebereich $\Delta\, a_v$ ist etwas kleiner als $\Delta\, a_h$. Der Schärfentiefebereich $\Delta\, a_v + \Delta\, a_h$

vergrößert sich also mit kleiner werdendem Blendendurchmesser.

Das Auge

Aufbau

Der Augapfel ist annähernd kugelförmig. Die Brennweite wird nicht nur von der bikonvexen Linse, sondern auch von der Hornhaut, dem Glaskörper und dem Kammerwasser beeinflusst. Weil die Medien auf beiden Seiten der Linse verschieden sind (Luft bzw. Glaskörper), sind die Brennweiten auf beiden Seiten verschieden. Projiziert wird das Bild auf die Netzhaut, die u.a. zwei Typen von lichtempfindlichen Zellen besitzt: Stäbchen und Zäpfchen. Während die Zäpfchen, von denen es drei verschiedene Typen gibt (Empfindlich für Rot, Grün, Blau), für das Farbensehen zuständig sind und v.a. im gelben Fleck konzentriert sind, sind die Stäbchen lichtempfindlicher (daher kann man bei schwachem Licht kaum Farben unterscheiden) und zahlreicher. Die Sehzellendichte nimmt von der Mitte der Netzhaut zum Rand hin ab. Die Wellenlängen, für die die Sehzellen empfindlich sind, sind angepasst an das Sonnenlicht, das (durch die Atmosphäre bedingt) seine größte Intensität im Bereich des sichtbaren Lichts hat.
Maximale Winkelauflösung: etwa eine Bogenminute; begrenzende Faktoren sind Beugungserscheinungen an der Pupille (Durchmesser: ca. 1 mm-8 mm) und die Sehzellendichte auf der Netzhaut (durch biologische Anpassung ist sie aber so groß (bis zu 14000 pro Quadratmillimeter), dass sie die durch den Pupillendurchmesser begrenzte Auflösung nicht weiter beschränkt, sondern in gleicher Größenordnung ist).
Empfindlichkeit: Das Auge kann, wenn es auf die Lichtstärke adaptiert ist, Lichtleistungen von $10^{-17}\,\mathrm{W}$ bis $10^{-6}\,\mathrm{W}$ verarbeiten. Die Stärke der Lichtempfindung ist aber wegen des großen Bereichs proportional zum Logarithmus der Lichtintensität. Ähnlich wie beim Fotoapparat passt das Auge sowohl den Pupillendurchmesser (entspricht Blendendurchmesser) als auch die „Belichtungszeit“ an (das hell adaptierte Auge integriert die Lichtleistung etwa über 50 µs, das dunkel adaptierte über eine halbe Sekunde).

Fehlsichtigkeit

Bei Kurzsichtigkeit befindet sich der Brennpunkt im ungünstigsten Fall vor der Netzhaut (trotz Akkomodation des Auges); Ursache dafür kann eine zu stark gekrümmte Linse/Hornhaut oder ein zu langer Augapfel sein. Daher braucht man eine Zerstreuungslinse als Brille.

Bei Weitsichtigkeit befindet sich der Brennpunkt im ungünstigsten Fall hinter der Netzhaut; meist ist das Auge dabei nicht mehr in der Lage, die Linse ausreichend zu krümmen (Altersweitsichtigkeit). Eine Sammellinse als Brille sorgt für die notwendige Brechung.

Die Lupe

Eine Lupe ist eine stark gekrümmte konvexe Linse, die man so hält, dass das Objekt näher als die objektseitige Brennweite an der Linse ist. Man sieht ein virtuelles Bild, das aufrecht und vergrößert ist.

[Stöcker, Demtröder: Normalvergrößerung der Lupe, Auge ist entspannt]

[Definition Wellenzahl]

Nichtlineare Optik

Es gibt einige Effekte, die sich mit der geometrischen Optik nicht erklären lassen: die Frequenz des Lichts kann sich beim Durchgang durch Materie ändern (Beispiel Leuchtstoffröhre, wo UV-Licht in weißes Licht umgewandelt wird). Nichtlineare Effekte werden erst bei hohen Feldstärken sichtbar, da sie sehr klein sind.

Effekte zweiter Ordnung – Frequenzverdopplung etc.

Die Polarisation hat auch einen Term, der von der doppelten Frequenz abhängt. Das bedeutet: die schwingenden Dipole strahlen Licht der doppelten Frequenz ab. Aus zwei Lichtquanten wird eines mit der doppelten Frequenz. Dieser Effekt ist nicht möglich mit Kristallen mit Inversionssymmetrie (Problem mit der Invarianz der Suszeptibilitätstensoren). Weitere Effekte zweiter Ordnung sind Frequenzmischung (zwei Lichtquanten verschiedener Frequenz ergeben zwei andere Lichtquanten, deren Frequenzen mit den ursprünglichen aber nichts zu tun haben) oder ähnliche Vorgänge (aus einem Photon entstehen zwei Photonen).

Effekte dritter Ordnung

Für Materialien mit Inversionssymmetrie sind Effekte dritter Ordnung die erste Art nichtlinearer Effekte.
Beispiel: Selbstfokussierung. Das Licht bewirkt einen intensitätsabhängigen Brechungsindex, der ähnlich funktioniert wie der Kerr-Effekt (Ausrichtung von Dipolen). Dadurch wird der Lichtpuls fokussiert, was die Intensität weiter vergrößert und so zu weiterer Fokussierung führt. Diese Rückkopplung kann z.B. bei starken Laserpulsen zur Zerstörung der optischen Komponente führen.
Oder: Selbstphasenmodulation. Durch die zeitliche Veränderung des Brechungsindex gibt es eine Rückkopplung auf die Phase, was für eine Verbreiterung des Pulses sorgt.

Quantenoptik

Der Photoeffekt

Ein Beispiel, das nicht mit Wellenoptik erklärt werden kann, ist der Photoeffekt. Ziemlich ähnlich ist auch die Photosynthese, d.h. mit klassischer Wellenoptik ist sämtliches Leben auf der Erde nicht erklärbar.

- Der Photostrom setzt erst bei einer materialabhängigen Schwellenfrequenz ein, statt bei allen Frequenzen zu fließen.
- Durch eine Gegenspannung kann der Photostrom komplett unterdrückt werden, egal wie hoch die Lichtintensität ist (aber von der Frequenz abhängt); d.h. offenbar haben die Photoelektronen eine frequenzabhängige Maximalenergie. Klassisch würde man erwarten, dass die Höhe der Gegenspannung, um den Strom komplett zu unterdrücken, stark intensitätsabhängig ist.
- Die Stärke des Photostroms steigt linear mit der Lichtintensität.
  (Abweichungen gibt es erst bei extrem hohen Intensitäten; dann sind alle Elektronen in einem Gebiet ausgelöst, es gibt keine weiteren Elektronen mehr. Dies wird als Lochbrennen bezeichnet, und wird genutzt, um das Wiederauffüllen beobachten und daraus Rückschlüsse auf den atomaren Aufbau ziehen zu können.)
- Der Photostrom setzt instantan ein. Klassisch würde man erwarten, dass sich die Energie erst ansammeln muss. Und gerade bei fremden Effekten, wie z.B. Wärme, würde es Stunden dauern, bis die nötige Energie zusammen wäre, d.h. so etwas ist auszuschließen.

Einzige Erklärung: Die Energie wird paketweise ausgetauscht, und zwar so, dass jedes Energiepaket ausreichend ist, um ein einzelnes Elektron auszulösen und zu beschleunigen. Die Energie, die ein Photon liefert, wird zum Teil für die Austrittsarbeit aufgewendet, mit dem Rest wird das Gegenfeld überwunden. Höhere Intensität bedeutet mehr Photonen, aber nicht mehr Energie pro Photon; höhere Frequenz bedeutet mehr Energie pro Photon. Es ergibt sich:

$$h\ f = e\ U\ + W_A$$

(h : **Planck'sches Wirkungsquantum**, f : Frequenz, U : maximale Gegenspannung, bei der der Strom 0 wird, W_A : materialspezifische minimale Austrittsarbeit (abhängig, wie stark die Elektronen gebunden sind, also gering z.B. bei Alkalimetallen))

Quantenausbeute, Empfindlichkeit und Dunkelstrom

Nicht alle Photonen können ein Elektron auslösen; das liegt daran, dass in größerer Tiefe die Wahrscheinlichkeit, das Kathodenmaterial zu verlassen, geringer ist, weil auf dem Weg nach außen viele Kollisionen passieren. Die Zahl der durchschnittlich pro Photon ausgelösten Elektronen nennt man **Quantenausbeute** η , sie ist stark frequenzabhängig (hochenergetische Elektronen können das Material leichter verlassen) und liegt für sichtbares Licht unter 1%. Es gibt aber spezielle Materialien, die eine ziemlich hohe Quantenausbeute haben.

Die **Empfindlichkeit** ist der Quotient aus Photostrom und eingestrahlter Lichtleistung.

Der **Dunkelstrom** eines Fotodetektors ist der Strom, den man ohne Lichteinfall misst. Bei diesen Elektronen wird die Austrittsarbeit durch thermische Energie der Kathode aufgebracht.

In einem Photomultiplier wird der Photoeffekt benutzt, um sehr schwaches Licht zu verstärken. Dabei werden die ausgelösten Photoelektronen zwischen Dynoden beschleunigt, bis sie genug Energie haben, um bei Kollisionen mit Atomen weitere Elektronen auszulösen, die ebenfalls beschleunigt werden. In so einer Kettenreaktion können pro Photon einige Dutzend freie Elektronen erzeugt werden und der Photoeffekt insgesamt milliardenfach verstärkt werden.

Innerer Photoeffekt

Als **inneren Photoeffekt** bezeichnet man, wenn die Elektronen zwar nicht aus dem Kathodenmaterial austreten, aber trotzdem als freie Elektronen bzw. Elektronengas innerhalb des Materials zur Verfügung stehen und so die Leitfähigkeit des Materials erhöhen. Das ist vor allem bei Halbleitern interessant, die nur wenige freie Elektronen (thermisch ausgelöst) besitzen, aber trotzdem eine geringe Austrittsarbeit besitzen, weil man so die Leitfähigkeit problemlos um einige Größenordnungen erhöhen kann.

Solarzellen sind wie Halbleiter-Dioden aufgebaut. An der Grenzschicht zwischen den verschiedenen Dotierungen wird das dort ausgelöste Elektron wegen des durch die Interdiffusion entstandenen Gegenfelds in die n-Schicht gezogen und somit von seinem Silizium-Ion räumlich getrennt. Über einen Verbraucher können beide wieder zusammengeführt werden. Es muss also einerseits die Grenzschicht groß genug sein, damit dort viele Elektronen ausgelöst werden, andererseits muss sie so schmal sein, dass die Elektronen auf die andere Seite gezogen werden und nicht instantan rekombinieren.

Inverser Photoeffekt

Ein beschleunigtes bzw. verzögertes geladenes Teilchen muss eine elektromagnetische Welle aussenden (siehe Synchrotronstrahlung, die Teilchen unterliegen ständig einer Zentripetalbeschleunigung). Weil die Lichtenergie quantisiert abgegeben wird, kann so bei der Rekombination eines vorher durch den Photoeffekt ausgelösten Elektrons wieder ein Photon der selben Energie erzeugt werden (falls nur ein Photon erzeugt wird).

Photonenmasse

Da Photonen eine bestimmte Energie haben und diese nach der Relativitätstheorie mit $E = m\ c^2$ von der Masse abhängt, kann man Photonen auch eine Masse zuordnen:

$$m = \frac{h\ f}{c^2}$$

Wenn ein Photon sich im Gravitationsfeld nach außen bewegt, muss es dazu potenzielle Energie aufwenden, weil es eine Masse besitzt. Das kann nur geschehen, wenn sich seine Frequenz verändert – man beobachtet eine Rotverschiebung.

Ein Photon kann auch durch ein Gravitationsfeld abgelenkt werden (Stichwort: Gravitationslinsen), wofür man allerdings die allgemeinene Relativitätstheorie benötigt.
Es kann auch sein, dass

$$E_{pot} \equiv \gamma\ \frac{M\ (h\ f/c^2)}{R} > h\ f \equiv E_{Photon}$$

gilt, d.h. die zu überwindende Differenz an potenzieller Energie bei der Entfernung um R von einer Masse M ist stets größer als die Photonenenergie (frequenzunabhängig, da man die Frequenz auf beiden Seiten herauskürzen kann). Es handelt sich dann um ein schwarzes Loch, R heißt Horizont oder Schwartzschild-Radius.

Photonenimpuls

Der Photonenimpuls ist

$$\vec{p} = \frac{h}{\lambda}\ \hat{k} = \hbar\ \vec{k} \quad (\hbar = h/(2\ \pi))\ .$$

Das bedeutet: Bei Kollisionen verhält sich ein Photon wie ein Materieteilchen. Eine Anwendung ist z.B. die Laserkühlung. Dabei wird die Frequenz so eingestellt, dass die Photonenenergie leicht unterhalb einer Absorpionslinie des zu kühlenden Teilchens ist. Wenn sich das Teilchen auf den Laser zubewegt, erscheint dieser violettverschoben, und das Photon kann absorbiert werden, wobei das Teilchen durch dessen Impuls etwas abgebremst wird. Stillstehende Teilchen können keine Photonen absorbieren, weil das Photon dann nicht violettverschoben erscheint und somit eine zu geringe Energie hat, d.h. eine Beschleunigung, die einer Aufheizung entspricht, ist nicht möglich. Die Abgabe der Photonenenergie erfolgt statistisch verteilt in eine beliebige Richtung und führt daher im Mittel nicht zu einer Beschleunigung des Teilchens.

Interferenz, quantenmechanisch betrachtet

Einzelne Photonen sind interferenzfähig, d.h. wenn man die Intensität so weit herunterfährt, dass nur noch einzelne Photonen nacheinander auf den Beobachtungsschirm auftreffen, entsteht trotzdem ein Interferenzmuster. Das ist mit den Maxwellgleichungen nicht erklärbar. Man benötigt eine Wahrscheinlichkeitsfunktion, die dieses Phänomen erklären kann.
Mit der Lichtintensität kann man die Interferenz nicht erklären, sondern nur mit den Funktionen für die elektrischen und magnetischen Felder. Man benötigt eine komplexe Wahrscheinlichkeitsfunktion, die die Wahrscheinlichkeitsdichte durch Quadrieren liefert.

Heisenbergsche Unschärferelation

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar$$

Materiewellen

(Skript Kapitel 10)

Die Vermutung von de Broglie, dass, wenn elektromagnetische Wellen wegen Quanteneffekten einen Teilchencharakter besitzen, auch Teilchen einen Wellencharakter haben müssen, bestätigte sich experimentell.

[Formeln dazu, Skript S. 177]

[Bragg-Beugung, Formeln, z.B. von Neutronen an Graphit]

Monochromator

Neutronen sind ein gutes Beispiel für den Wellencharakter von Teilchen, weil sie ungeladen sind und daher kaum mit Materie wechselwirken. Der einzige größere Effekt, der auftritt, ist der Zerfall von Neutronen in ein Proton, ein Elektron und ein Elektron-Antineutrino.

Neutronen verschiedener Geschwindigkeiten (und damit Energien) werden, wenn sie durch einen Kristall gehen, in verschiedene Winkel gestreut. Man kann also unter einem Winkel einen monochromatischen Teilstrahl ausblenden, daher heißt der Kristall Monochromator. Diesen Strahl kann man durch eine Materialprobe schicken, die die Energie der Neutronen verändert, und dahinter die Neutronen ein zweites Mal durch einen Kristall schicken (den man jetzt Energieanalysator nennt). So kann man die in die Materialprobe einfallende Energie als auch die austretende Energie detektieren, und damit Rückschlüsse auf die Probe ziehen.

Beugung von Elektronen

Da Elektronen eine wesentlich kleinere Masse als Neutronen haben, haben sie bei gleicher Materiewellenlänge (im Bereich von Ångström, zur Untersuchung von Materie) eine wesentlich größere kinetische Energie. Die Geschwindigkeit liegt aber trotzdem meist so niedrig, dass man nichtrelativistisch rechnen kann.

Elektronenbeugung kann man sehr viel einfacher als Neutronenbeugung realisieren, weil die nur wenig gebundenen Elektronen leichter gewonnen werden können (Glühkathode, Photoeffekt, Hochspannung) als die Neutronen aus dem Kern (Atomspaltung im Reaktor, Spallationsquelle). Man konstruiert dazu z.B. eine Glühkathode im Vakuum-Glaskolben, deren Elektronenstrahl auf eine dünne Schicht Graphitpulver (ist schichtweise aufgebaut) trifft. Die Elektronen werden gebeugt, interferieren und zeigen auf dem mit einem Leuchtschirm beschichteten Ende des Kolbens Interferenzringe. Die Ringe entstehen, weil es im Graphitpulver immer Kristallite gibt, die so ausgerichtet sind, dass Bragg-Beugung entsteht.

Durch die Beugungsexperimente ist klar, dass Elektronen u.ä. auf jeden Fall Welleneigenschaften besitzen. Die Tatsache, dass sie geladen sind, sagt noch nichts über einen Teilchencharakter aus: man könnte die Ladung über das Wellenfeld verteilen. Aber durch Experimente wie z.B. den Milikan-Versuch (auch heute noch eine sehr genaue Art, die Elementarladung zu bestimmen) stellt man eine Quantisierung der Ladung fest, was beweist, dass Elektronen auch Teilchencharakter haben.

Materiewellen

Offensichtlich unterscheiden sich z.B. Elektronen und Photonen nur durch die Ruhemasse. Man müsste also Materie (d.h. Teilchen mit einer Ruhemasse) genauso durch eine Wellengleichung beschreiben können wie Photonen (elektromagnetische Wellen). Sie beschreibt die Wahrscheinlichkeit, an einem Ort zu einer Zeit Materie zu finden. Sie kann aber nicht gleich der

Wellengleichung für Licht sein, weil diese die falsche Beziehung zwischen Impuls und Energie liefert (berücksichtigt eben keine Ruhemasse bzw. Ruheenergie).

Schrödinger fand eine derartige Gleichung, die die Anforderungen erfüllt (zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung):

$$H\ \psi(\vec{r}) = \left(-\frac{\hbar}{2\ m}\ \Delta + V(\vec{r})\right)\psi = E\ \psi\ .$$

Sie entspricht der klassischen Hamiltonfunktion, was der Grund für die Bedeutung des Hamilton-Formalismus in der Quantenmechanik ist. Sie ist eine Differenzialgleichung erster Ordnung in der Zeit und zweiter Ordnung im Ort, daher ist sie nicht relativistisch invariant. Es gibt relativistische Verallgemeinerungen, die Klein-Gordon-Gleichung (nur zweite Ableitungen) bzw. die Dirac-Gleichung (nur erste Ableitungen), die auf die Wellengleichungen für Bosonen und Fermionen führen. Wechselwirkungen mit anderen Teilchen ist in dieser Gleichung nicht ausreichend berücksichtigt, weshalb man für diesen Fall eine weitere Verallgemeinerung braucht. Die Gleichung hat immer komplexe Lösungen; beim elektromagnetischen Feld kann man zumindest durch Linearkombination immer eine reelle Lösung finden, bei der Schrödinger-Gleichung aber nicht. Und: Die Schrödinger-Gleichung beinhaltet, im Gegensatz zur elektromagnetischen Wellengleichung, die Masse (d.h. Teilchenanzahl muss bekannt sein) und das Planck'sche Wirkungsquantum $\hbar$.

Aus den Lösungen der Schrödinger-Gleichung ergibt sich, dass, wenn man ein Teilchen in einen Potenzialtopf mit nicht unendlich dicken Wänden sperrt, es im Gegensatz zur klassischen Betrachtung eine zwar sehr kleine Aufenthaltswahrscheinlichkeit, die aber trotzdem nicht 0 ist. Das Teilchen kann also (mit dieser geringen Wahrscheinlichkeit) die Wand des Potenzialtopfs durchtunneln. Das kann man mit evaneszenten Wellen der Optik vergleichen.

Ein Beispiel für das Vorkommen dieses Tunneleffekts ist der radioaktive Zerfall von Alphateilchen. Klassisch könnten diese Teilchen nämlich den Atomkern nicht verlassen; daher wird der radioaktive Zerfall als Tunnelprozess interpretiert. Ein weiteres Beispiel ist das Rastertunnelmikroskop; dabei können Elektronen von einer Metalloberfläche „durch die Luft“ zu einer anderen tunneln, ohne Austrittsarbeit verrichten zu müssen. Mit Hilfe des Tunnelstroms, der proportional zur Tunnelwahrscheinlichkeit und damit zum Abstand ist, kann man die Oberfläche mit atomarer Auflösung vermessen.

Unschärfe

Einen kurzen Puls einer Lichtwelle kann man sich als Überlagerung unendlich vieler Wellen verschiedener Wellenlänge vorstellen (das erkennt man bei der Fouriertransformation). Daher kann ein solcher Puls nicht monochromatisch sein. Das Gleiche gilt auch für die Quantenmechanik.

Man betrachtet z.B. ein Proton, das eine kinetische Energie von 1 MeV hat (man kann dabei noch klassisch rechnen). Man kann es als Wellenpaket sehen, das durch die Gauß-Verteilung beschrieben wird (d.h. die Aufenthaltswahrscheinlichkeit rund um den mittleren Aufenthaltsort wird durch die Gaußsche Glockenkurve angegeben) (Gauß-Verteilung, weil man dadurch die Berechnung analytisch machen kann). Bei der Bewegung des Wellenpakets gibt es einen Unterschied zwischen der Geschwindigkeit des Schwerpunkts des Wellenpakets und der Phasengeschwindigkeit der zentralen Komponente wegen der nichtlinearen Dispersionsrelation bei Materiewellen. Dadurch wird das Wellenpaket breiter und flacher (seine Fläche muss ja erhalten bleiben, die Gesamtwahrscheinlichkeit muss 1 bleiben), es verschmiert gewissermaßen; auf lange Zeiten ähnelt das Ergebnis dem, als hätte man mehrere Teilchen, die sich von einem Punkt aus mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen und daher auseinandergezogen werden. Für das oben genannte Proton entspricht das bei einer Laufzeit von einer Sekunde, bei der das Proton mehrere tausend Kilometer zurücklegt, ein Auseinanderziehen des Wellenpakets von einigen Mikrometern auf etwa einen Zentimeter. Weil das immer noch klein gegen die Größenordnung der Strecke, die es sich fortbewegt, ist, nimmt man das Proton meist als Teilchen wahr.

Bei Elektronen ergibt sich, dass das Wellenpaket bereits nach wenigen Perioden der intrinsischen Schwingung über die Größe mehrerer Atome verschmiert ist, d.h. Elektronen haben in Atomen nicht mehr viel mit klassischen Teilchen gemein.