

Ein Skript der Vorlesung
Teilchen- und Kernphysik 1

(unkorrigierte Version – bitte am Semesterende neue Version downloaden!)

O. Zimmer und N. Kaiser
TU München
5. Semester, WS 2000 / 2001

Datum: 22.11.2001

von Michael Wack und Christoph Moder
(© 2001–2002)
<http://www.skriptweb.de>

Hinweise (z.B. auf Fehler) bitte per eMail an uns: mail@skriptweb.de – Vielen Dank.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|----|
| Organisatorisches..... | 4 |
| Literatur..... | 4 |
| Inhalt der Vorlesung..... | 4 |
| Übungen..... | 4 |
| 1. Eine Art Einleitung..... | 5 |
| 1.1. Ziel der Teilchenphysik..... | 5 |
| 1.2. Experimenteller Befund – hierarchische Ordnung der Materie..... | 5 |
| 1.2.1. Experimentelle Methoden..... | 5 |
| 1.2.2 Einheiten..... | 6 |
| 1.2.3 Hierarchische Ordnung der Materie..... | 6 |
| 1.3 Elementarteilchen und ihre fundamentalen Wechselwirkungen..... | 7 |
| 1.3.1 Quarks & Leptonen..... | 7 |
| 1.3.2 fundamentale Wechselwirkung..... | 7 |
| a) elektromagnetische Wechselwirkung..... | 8 |
| b) starke WW..... | 8 |
| c) schwache WW..... | 8 |
| Zusammenfassung (WW)..... | 8 |
| d) Übersicht..... | 8 |
| 1.4 Zusammengesetzte Systeme..... | 8 |
| 1.4.1 Kerne (Nuklide)..... | 8 |
| 1.4.2 Hadronen (stark wechselwirkende Materie)..... | 9 |
| a) Baryonen..... | 9 |
| b) Mesonen..... | 9 |
| 2. Nukleonen und Bindungsenergien..... | 10 |
| 2.1 Der Atomkern und seine Bestandteile..... | 10 |
| 2.2 Nuklide..... | 10 |
| 2.2.1 Ladungszahl Z | 10 |
| 2.2.2 Die Massenzahl..... | 11 |
| 2.3 Experimentelle Massenbestimmungen..... | 11 |
| 2.3.1 Massenspektrograph..... | 11 |
| 2.3.2 Penning–Falle..... | 12 |
| 2.3.3 Kernreaktionen..... | 12 |
| 2.4. Die Weizsäcker–Massenformel (Trägheitsmodell)..... | 12 |
| 3. Stabilität der Kerne..... | 15 |
| 3.1 Der Alpha–Zerfall von Atomkernen..... | 15 |
| 3.2 Beta–Zerfall von Kernen..... | 18 |
| Beta–Zerfall in ungeraden Kernen..... | 19 |
| Beta–Zerfall in geraden Kernen..... | 19 |
| Elektronen–Einfang..... | 20 |
| Typische Beta–Zerfalls–Lebensdauern..... | 20 |
| 3.3 Kernspaltung..... | 21 |
| Spontane Spaltung..... | 21 |
| Induzierte Spaltung..... | 22 |
| 4. Streuprozesse..... | 23 |
| 4.1 Wirkungsquerschnitt..... | 23 |
| 4.2 Relativistische Kinematik von Streuprozessen..... | 24 |
| 4.3 Reaktionswahrscheinlichkeit und Fermi’s Goldene Regel..... | 25 |
| 4.4 Elastische Streuung an einem Potential..... | 26 |

| | |
|---|----|
| 4.5 Beispiele: Streuung am Yukawa- und Coulombpotential..... | 27 |
| 4.6 Wechselwirkung durch Austausch virtueller Teilchen..... | 28 |
| 4.7 Elastische Elektronenstreuung an einer Ladungsverteilung..... | 29 |
| Eigenschaften von Formfaktoren..... | 30 |
| Mottstreuung..... | 31 |
| 4.8 Messung von Formfaktoren aus der Elektronenstreuung..... | 32 |

Organisatorisches

Theoretiker:

Norbert Kaiser

Experimentator:

Oliver Zimmer

Literatur

- B. Pooh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche: Teilchen und Kerne, Springer Verlag
relativ komprimiert
Prüfung: Schnittmenge aus Vorlesung und diesem Buch
- H. Frauenfelder, E.M. Henley: Subatomic Physics, Prentice Hill
- D.H. Perkins: Introduction to High Energy Physics, Addison–Wesley
- T. Mayer–Kuckuck: Kernphysik, Teubner Verlag
- F. Halzen, A.D. Martin: Quarks and Leptons, Wiley & Sons
- G. Kane: Modern Elementary Particle Physics, Addison–Wesley
- P. Schmüser: Feynman–Graphen und Eichtheorien für Experimentalphysiker, Lecture Notes in Physics, Springer

Inhalt der Vorlesung

- Woher wissen wir, wie alt das Universum ist?
- Wie entstehen die chemischen Elemente?
- Wieso gibt es keine Antiwelt?
- Warum brennt die Sonne? Warum so lange?
- Warum zerfallen freie Neutronen, sind im Kern aber stabil?
- Warum verhalten sich Teilchen manchmal etwas anders als Antiteilchen?
- Was sind die Bausteine und welche Kräfte halten sie zusammen?

=> Nukleare Astrophysik

Übungen

Gedacht als Diskussionsgruppen – aber Diskussion bringt nichts, wenn man sich nicht mit dem Stoff auseinander gesetzt hat.

Leiter: Jan Friedrich, Michael Wiesmann, Roland Kuhn, Thorsten Renk

Di 14:00–16:00

Mi 09:00–11:00 (2x)

Do 14:00–16:00

Im Februar: Fahrt zum CERN nach Genf, ILL Grenoble (dann ist Beschleuniger abgeschaltet, man kann ihn besichtigen)

CERN und DESY bieten Sommerakademien

1. Eine Art Einleitung

1.1. Ziel der Teilchenphysik

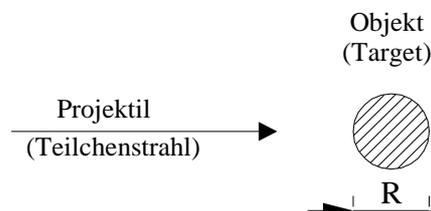
Das Ziel ist die Suche nach Grundbausteinen der Materie und das Verständnis der fundamentalen Wechselwirkungen.

1.2. Experimenteller Befund – hierarchische Ordnung der Materie

1.2.1. Experimentelle Methoden

a) Streuung

Ein Projektil (Teilchenstrahl), das sich durch einen bestimmten Impuls auszeichnet, trifft auf das Target.



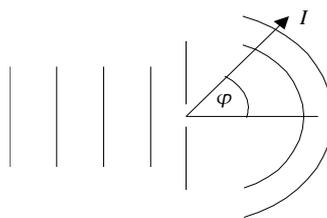
$$\vec{p} = \hbar \vec{k} \quad (\text{de-Broglie-Beziehung})$$

$$\text{Wellenlänge } \lambda = (2\pi) / |\vec{k}|$$

Auflösung von Objektstrukturen:

$$|\vec{p}| \cdot R > \hbar \Leftrightarrow |\vec{k}| \cdot R > 1 \Leftrightarrow \lambda < 2\pi R$$

Analogie: Beugung von Licht an einem Spalt; ist die Wellenlänge zu groß, kann der Spalt nicht abgebildet werden, sondern es tritt Beugung auf.



=> Auflösung kleiner Strukturen in Streuexperimenten bedarf großer Teilchenimpulse/Energien

=> Teilchenbeschleuniger wird benötigt.

Beschreibung der Teilchenkinematik in Streuprozessen wird beschrieben durch die spezielle Relativitätstheorie (z.B. Band 3a Greiner, Harry Deutsch Verlag):

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}$$

$$\text{Photon: } E = |\vec{p}| c$$

Bei niedriger Energie:

$$E = \underbrace{m c^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{|\vec{p}|^2}{2m}}_{\text{kinetische Energie}} + O(|\vec{p}|^4)$$

b) Spektroskopie

- Anregung innerer Freiheitsgrade zusammengesetzter Systeme (mit Teilchen/Strahlung)
- Bestimmung der Zerfallsprodukte eines angeregten Systems

=> Informationen über Eigenschaften (Quantenzahlen, wie Drehimpuls, Parität, ...)

Beispiele:

- Franck–Hertz–Versuch, allgemeine Atomspektroskopie, Kernspektroskopie, Hadronenspektroskopie

1.2.2 Einheiten

- Längen: 1 fm (Fermi) = 10^{-15} m
- Energien: 1 eV = $1,602 \cdot 10^{-19}$ J
1 MeV = 10^6 eV
1 GeV = 10^9 eV
- Lichtgeschwindigkeit: $c = 2.998 \dots \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- $\hbar c = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm} \approx 2 \text{ GeV} \cdot \text{fm}$

1. Beispiel: Wie groß muß der Teilchenimpuls $|\vec{p}|$ mindestens sein, um Strukturen $R \leq 0,1 \text{ fm}$, z.B. im Inneren des Protons, aufzulösen?

$$|\vec{p}| > \frac{\hbar}{R} = \frac{\hbar c}{R c} = 2 \frac{\text{GeV}}{c}$$

2. Beispiel: thermische Neutronen:

$$\lambda \simeq 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$$

Kerne: $10^{-15} \text{ m} < R < 10^{-14} \text{ m} \Rightarrow$ isotrope Streuung

1.2.3 Hierarchische Ordnung der Materie

| <i>System</i> | <i>Bestandteile</i> | <i>Größenordnung</i> | <i>Typisches Energiespektrum</i> |
|-----------------|-----------------------------------|-------------------------------------|----------------------------------|
| Atom | Kern und Elektron | 10^{-10} m | [Grafik] |
| Kern | Nukleonen: Protonen und Neutronen | 10^{-14} m | [Grafik] |
| Nukleon | Quarks | $10^{-15} \text{ m} = 1 \text{ fm}$ | [Grafik] |
| Elektron Quarks | ? | $< 10^{-18} \text{ m}$ | Keine Anregung bekannt |

| | <i>Elementarteilchen</i> | <i>Zusammengesetzte Systeme</i> |
|------------------------|--------------------------|---------------------------------|
| Unterscheidungsmerkmal | punktförmig | ausgedehnt |
| | Keine Anregungen | Anregungen |

1.3 Elementarteilchen und ihre fundamentalen Wechselwirkungen

Gegenwärtiges theoretisches Bild – „Standardmodell der Elementarteilchenphysik“

1.3.1 Quarks & Leptonen

| <i>Quark-Sorte</i> („flavour“) | <i>Ladung [e]</i> | <i>Masse</i> $\left[\frac{\text{GeV}}{c^2} \right]$ | |
|-----------------------------------|-------------------|--|--------|
| u (up) | +2/3 | $\sim 10^{-2}$ | leicht |
| d (down) | -1/3 | $\sim 10^{-2}$ | leicht |
| s (strange) | -1/3 | $\sim 10^{-1}$ | leicht |
| c (charm) | +2/3 | 1,0 – 1,6 | schwer |
| b (bottom) | -1/3 | 4,1 – 4,5 | schwer |
| t (top) | +2/3 | 170 – 190 | schwer |

| <i>Lepton</i> | <i>Sorte</i> | <i>Ladung [e]</i> | <i>Masse</i> $\left[\text{MeV}/c^2 \right]$ |
|---------------|------------------|-------------------|--|
| e^- | Elektron | -1 | 0,511 |
| ν_e | e-Neutrino | 0 | $< 2,5 \cdot 10^{-6}$ |
| μ^- | Myon | -1 | 105,66 |
| ν_μ | μ -Neutrino | 0 | $< 0,17$ |
| τ^- | τ -Lepton | -1 | 1777 |
| ν_τ | τ -Neutrino | 0 | < 24 |

1.3.2 fundamentale Wechselwirkung

- Gravitation
- Elektromagnetische WW
- Starke WW
- Schwache WW

a) elektromagnetische Wechselwirkung

- Bestimmt die Physik der Atomhülle (Coulomb–Kraft)
- WW zweier Elektronen beschreibbar durch Austausch eines Photons
Feynman–Graph:
[Grafik]

b) starke WW

- [Grafik]
- bestimmt die Struktur von Neutron und Proton

c) schwache WW

- bestimmt z.B. den β –Zerfall
$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$
- Kraft wird vermittelt durch W^- und Z^0 –Bosonen
[Grafik] „geladener Strom“
- [Grafik]

Zusammenfassung (WW)

Die drei fundamentalen WW der Elementarteilchen werden vermittelt durch Austausch von **Vektor–Bosonen** (Teilchen mit Spin 1)

- Photonen, W^- , Z^0 –Bosonen für elektroschwache WW
- Gluonen für die starke WW

d) Übersicht

| | <i>Schwach</i> | <i>elektromagnetisch</i> | <i>stark</i> |
|---|----------------|--------------------------|--------------|
| Quarks | X | X | X |
| e, μ, τ | X | X | – |
| Neutrinos ν_e, ν_μ, ν_τ | X | – | – |

1.4 Zusammengesetzte Systeme

Kernphysik: Eine Welt zwischen Atomen und Elementarteilchen

1.4.1 Kerne (Nuklide)

- Gebundene Systeme aus Nukleonen
- Kernmassenzahl **A** = Protonenzahl **Z** + Neutronenzahl **N**
- Nuklidkarte (zu bekommen unter: http://presse.fzk.de/aktuelles/presseinfo/1999/pl09_99.htm)
[Grafik]

1.4.2 Hadronen (stark wechselwirkende Materie)

- Gebundene Systeme aus Quarks und Gluonen

a) Baryonen

Valenzquark-Inhalt: qqq (3 Quarks)

Spin (Eigendrehimpuls): $J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

Besispiele: Proton: uud (Ladung +e)

Neutron: udd (Ladung 0)

b) Mesonen

Valenzquark-Inhalt: $q \bar{q}$ (Quark-Antiquark-Paare)

Spins: $J = 0, 1, 2$

Besispiele: Pion (π^+, π^-, π^0) (J=0)

Rho-Meson (ρ^+, ρ^-, ρ^0) (J=1)

2. Nukleonen und Bindungsenergien

2.1 Der Atomkern und seine Bestandteile

Nachweis des Atomkerns: (Rutherford, Geiger, Mardsen 1908–1913)

Experiment: Streuung von α -Teilchen an dünnen Goldfolien

Beobachtung: Streuung unter großen Winkeln

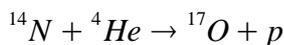
Erklärung: lokales Streuzentrum (Atomkern)

Nachweis des Protons (Rutherford (~1920))

Experiment: Beschuß von Wasserstoff und leichten Atomkernen (z.B. Stickstoff) mit α -Teilchen (${}^4\text{He}$ -Kerne)

Beobachtung: positiv geladene Teilchen mit größerer Reichweite als α -Strahlung.

Schlußfolgerung: beobachtete Teilchen sind Wasserstoffkerne (Protonen).



Nachweis des Neutrons (Chadwick 1932)

1928 Bothe&Becker: Beobachtung durchdringender neutraler Strahlung von Polonium/Beryllium
Quelle (α -Teilchen)

1932: Experiment von Joliot, Curie, Chadwick

[Grafik]

Beobachtung: Strahlung aus Po/Be schlägt Protonen aus Paraffin

Deutung (Joliot, Curie): „?“ ist extrem hochenergetische γ -Strahlung

Chadwick: [Grafik]

zentraler elastischer Stoß: $\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} M v^2$; $m v_0 = M v - m v_1$

$$\Rightarrow v = \frac{2m}{m+M} v_0$$

2 verschiedene Konverter: $M_H = 1$, $M_N = 14$

$$\frac{v_H}{v_N} = \frac{m+14}{m+1} \quad (\text{Messvorschrift für } m)$$

Ergebnis: $m \approx 1 \Rightarrow$ Entdeckung des Neutrons

Übersicht über die Nobelpreisträger: <http://www.nobel.se/physics/laureats/>

2.2 Nuklide

2.2.1 Ladungszahl Z

- Z gibt die Zahl der Protonen im Kern an
- Die Kernladung ist Ze , $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$
- Die Hülle eines elektrisch neutralen Atoms enthält Z Elektronen, die die Ladung des Kerns kompensieren.
- Experimenteller Nachweis der Neutralität von Atomen (Neutronen)
Versuch: Atom- bzw. Molekularstrahl (Neutronen) durch ein starkes \vec{E} -Feld abzulenken

$$\Rightarrow |e_p - e_e| \leq 10^{-18} e, |e_n| \leq 10^{-20} e$$

2.2.2 Die Massenzahl

Bezeichnungen:

- $A = Z + N$ (Anzahl der Nukleonen im Kern)
- Nuklid: Kern mit bestimmtem Z und N (oder Z und A)
- Isobare: Nuklide mit gleicher Massenzahl A
- Isotope: Nuklide mit gleicher Kernladungszahl Z
- Symbol für Nuklide: ${}^A X$ (oder ${}^A_Z X_N$), X : chemisches Element
z.B. ${}^9\text{Be}$ ($Z=4$, $N=5$), ${}^{12}\text{C}$ ($Z=6$, $N=6$), ${}^{14}\text{C}$ ($Z=6$, $N=8$)

Bindungsenergie $B(Z, A)$, „Massendefekt“:

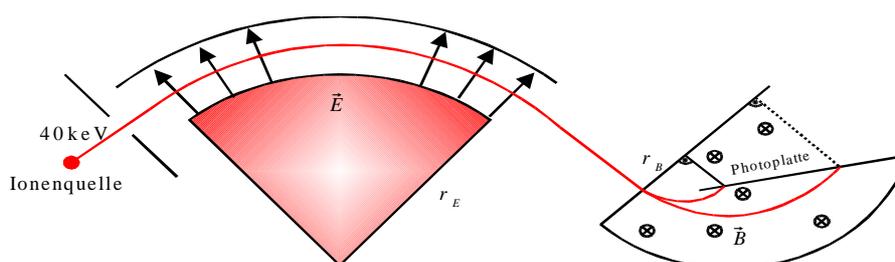
- definiert über Atommasse $M(Z, A)$

$$B(Z, A) := \left[\underbrace{Z(M_p + m_e) + (A - Z)M_n}_{\text{Masse der Atombestandteile}} - \underbrace{M(Z, A)}_{\text{Atommasse}} \right] \cdot c^2$$

- $M_p = 938,272 \text{ MeV}/c^2 = 1836,149 m_e$
 $M_n = 939,566 \text{ MeV}/c^2 = 1838,679 m_e$
 $m_e = 0,511 \text{ MeV}/c^2$

2.3 Experimentelle Massenbestimmungen

2.3.1 Massenspektrograph



Mattauch–Massenspektrograph

1. Teil: Energiefilter: $F = QE = (M v^2)/r_E$; $E_{kin} = 1/2 M v^2 = 1/2 QE r_E$;
2. Teil: Impulsfilter: $F = QvB = (M v^2)/r_B$; $p = Mv = QB r_B$;

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow M = \frac{p^2}{2E_{kin}} = \frac{B^2 r_B^2}{E r_E} Q$$

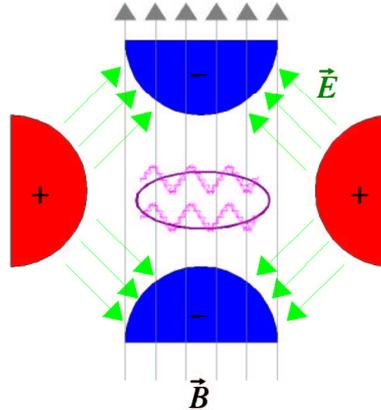
\Rightarrow experimentelle Bestimmung von M/Q .

- Massenstandard: ${}^{12}\text{C}$

- Definition der Atomaren Masseneinheit:

$$1u = 1/12 M(^{12}\text{C}) = 931,494 \text{ MeV}/c^2 = 1,66043 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

2.3.2 Penning-Falle



Zyklotronbewegung

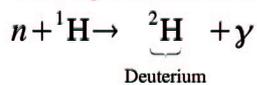
$$F = M a = M v \omega = Q v B$$

$$\Rightarrow \omega_c = \frac{QB}{M} \text{ Messgröße}$$

2.3.3 Kernreaktionen

Methoden zur Bestimmung der Masse kurzlebiger Kerne und des Neutrons:

- Einfang thermischer Neutronen ($1/40 \text{ eV}$) in Wasserstoff:



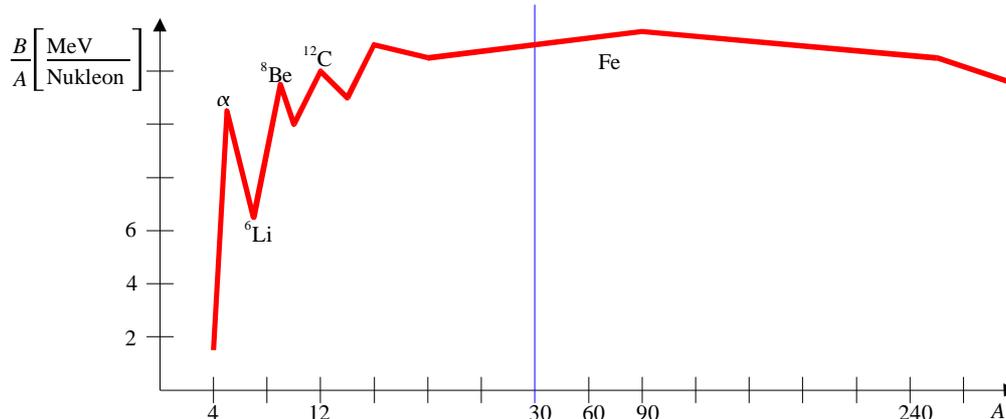
$$B({}^2\text{H}) = \left(M_n + M({}^1\text{H}) - M({}^2\text{D}) \right) c^2 = \underbrace{E_\gamma}_{\text{gemessene } \gamma\text{-Energie}} + \underbrace{\frac{E_\gamma^2}{2 M({}^2\text{H}) c^2}}_{\text{Rückstoßenergie auf Deuteron}} \approx 2,225 \text{ MeV}$$

- Massenspektroskopische Präzisionsmessung von $M({}^2\text{H}) - M({}^1\text{H})$ und Präzisionsmessung der γ -Energie E_γ (mit Doppelkristallspektrometer GAMSIV am ILL)

$$M_n = 1,00866491637(82)u$$

2.4. Die Weizsäcker-Massenformel (Trägheitsmodell)

Bindungsenergie (von Kernen) pro Nukleon als Funktion von A (für stabile Kerne)



- $B/A \approx 7,5 - 8,8$ MeV (außer für ganz leichte Kerne)
- B/A maximal für $A \approx 60$, daher:
 - Eisen sehr häufig im Universum
 - 2 mögliche Formen der Energiegewinnung auf Kernumwandlungen
 - Kernfusion $A_1 + A_2 \rightarrow A_x$ ($M(A_1) + M(A_2) < 60u$)
 - Kernspaltung $A_x \rightarrow A_1 + A_2$ ($M(A_x) \gg 60u$)
- Näherungsweise Konstanz von B/A
 - ⇒ Nukleonen wechselwirken nur mit nächsten Nachbarn („Sättigung“ der Kernkraft)
 - Grund: bei WW eines Nukleons mit allen anderen wäre $B \propto A(A-1)$

Parameterisierung der gemessenen Kernmassen: Weizsäcker–Massenformel (1935):

$$M(A, Z) = \left\{ N M_n + Z M_p + Z m_e \right\} + \left[-a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_a \frac{(N-Z)^2}{4A} + \frac{\delta}{A^{1/2}} \right]$$

Mögliche Wahl der Parameter ($N = A - Z$):

- $a_v = 15,7 \text{ MeV}/c^2$
- $a_s = 17,2 \text{ MeV}/c^2$
- $a_c = 0,714 \text{ MeV}/c^2$
- $a_a = 93,2 \text{ MeV}/c^2$
- $\delta = \begin{cases} -11,2 \text{ MeV}/c^2, & \text{falls } Z \text{ und } N \text{ gerade sind. (gg-Kerne)} \\ 0, & \text{falls } A \text{ ungerade ist. (ng-Kerne)} \\ 11,2 \text{ MeV}/c^2, & \text{falls } Z \text{ und } N \text{ ungerade sind. (nn-Kerne)} \end{cases}$

Interpretation der Massenformel:

- bestätigt Rechnung: $A \propto R^3$ (drückt konstante Dichte der Kernmaterie aus, siehe Kapitel 6)

a) Volumenterm $\propto A$ (\rightarrow Sättigungscharakter der Kernkraft)

$$\rho_N \approx 0,13 \text{ Nukleonen}/\text{fm}^3 = 2 \cdot 10^{-17} \text{ kg}/\text{m}^3$$

⇒ mittlerer Nukleonenabstand im Kern $\approx 1,8 \text{ fm}$

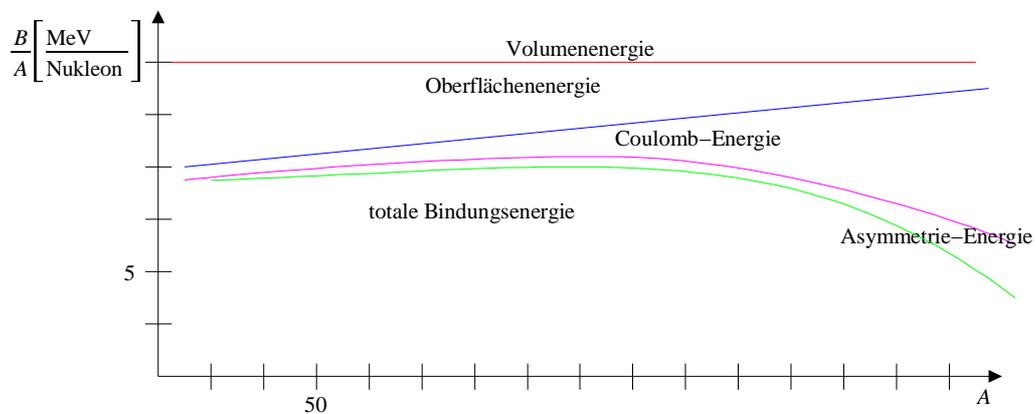
b) Oberflächenterm $\propto R^2 \propto A^{2/3}$

c) Coulomb–Term:

$$E_{\text{Coulomb}} = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)}{4\pi\epsilon_0 R} \propto \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

d) Asymmetrieterm: Kompensation der Coulomb–Abstoßung der Protonen durch Einbau überschüssiger Neutronen; z.B. ^{208}Pb : $N - Z = 44$.

e) Paarungsterm: gerade Anzahl von Neutronen und/oder Protonen erhöht die Stabilität des Kerns



3. Stabilität der Kerne

Befund: Stabile Kerne existieren nur in sehr schmalen Band in der (N, Z) -Ebene. Alle übrigen Nuklide sind instabil und zerfallen spontan durch unterschiedliche Mechanismen.

- Bei deutlichem Neutronenüberschuss: energetisch günstiger, Neutronen in Protonen umzuwandeln:
 $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ (β^- -Zerfall, verursacht durch schwache WW, Details später)
- Bei überzähligen Protonen: Umwandlung von Proton in Neutron im Kern:
 $p_{Kern} \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ (β^+ -Zerfall, kann nur *im Kern* stattfinden)
 $M_p < M_n, \Delta_{np} \approx 1,3 \text{ MeV}$
- Maximum der Bindungsenergie pro Nukleon liegt bei ${}_{26}^{56}\text{Fe}$ – und ${}_{28}^{62}\text{Ni}$ –Isotopen, dies sind die stabilsten Kerne.
- Bei schwereren Kernen nimmt B/A wegen Coulombabstoßung ab. Mit wachsendem A werden Kerne instabil und zerfallen spontan in zwei oder mehrere leichte stabile Kerne.
- Bedingung für Zweikörperzerfall: $M(A, Z) > M(A_1, Z_1) + M(A_2, Z_2)$.
- Häufig ist einer der Tochterkerne ein ${}^4_2\text{He}$ –Kern ($A_1=4, Z_1=2$). Dieser Zerfall heißt α -Zerfall.
- Zerfällt der Kern in zwei etwa gleich große Bruchstücke, so spricht man von **spontaner Spaltung**. Erst von Bedeutung für Kerne mit $Z > 110$.
- Zerfallswahrscheinlichkeiten sind stark unterschiedlich. Man nennt Nuklide **stabil**, wenn ihre Lebensdauer größer als das Alter des Sonnensystems ist ($5 \cdot 10^9$ Jahre).

Zerfallskonstante λ : Zerfallswahrscheinlichkeit eines Kerns pro Zeiteinheit

Lebensdauer: $\tau = 1/\lambda$

Halbwertszeit: $T_{1/2} = \ln 2 / \lambda = \tau \cdot \ln 2$

- Messung von λ durch Bestimmung der Aktivität (Zahl der Zerfälle pro Zeiteinheit):

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N$$

(Probe enthält N radioaktive Kerne)

Bei kurzlebigen Nukliden misst man die zeitliche Abnahme der Aktivität:

$$A(t) = \lambda N(t) = \lambda N_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad \text{mit } N_0 = N(t=0).$$

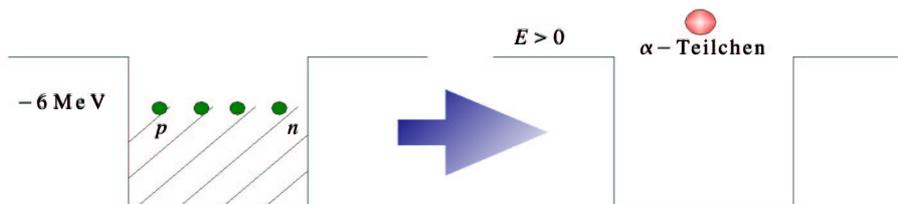
Methode ist möglich für $T_{1/2} < 1 \text{ a}$. Bei längerlebigen Nukliden muss man neben der Aktivität A auch die Zahl N der Kerne in der Probe bestimmen.

3.1 Der Alpha-Zerfall von Atomkernen

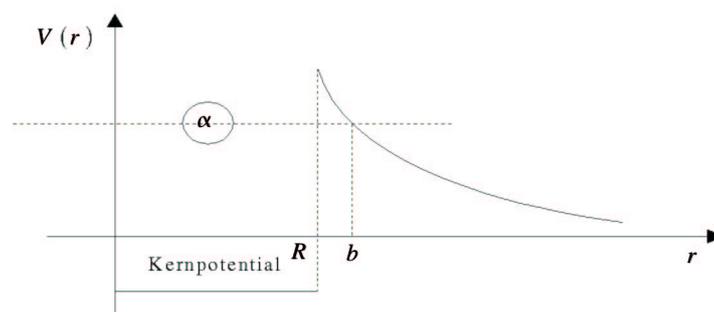
- Protonen und Neutronen sind auch in schweren Kernen mit bis zu 7 MeV gebunden und können nicht aus dem Kern entweichen.
- Emission eines gebundenen Systems ist möglich, da zusätzlich dessen Bindungsenergie zur

Verfügung steht.

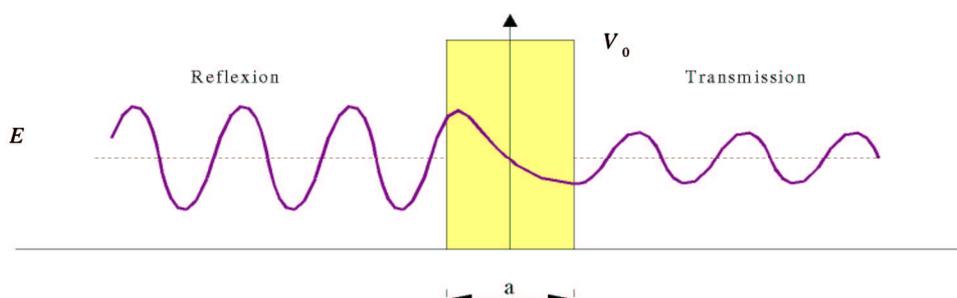
- von Bedeutung für α -Teilchen: ${}^4_2\text{He}$ mit außerordentlich großer Bindungsenergie von **7,1 MeV/Nukleon**
(zum Vergleich: Deuteron **1,1 MeV/Nukleon**, Tritium ${}^3_1\text{H}$: **2,8 MeV/Nukleon**, ${}^3_2\text{He}$: **2,6 MeV/Nukleon**)



- α -Teilchen kann Kern nicht unmittelbar verlassen: Coulomb-Barriere
- Potenzielle Energie eines α -Teilchens als Funktion des Abstands von der Kernmitte r :



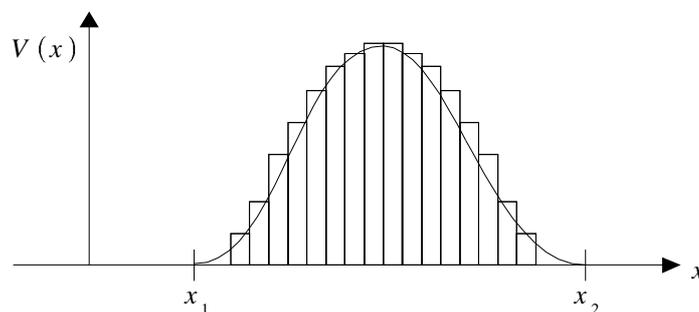
- α -Teilchen muss die Coulomb-Barriere überwinden, das ist klassisch nicht möglich, aber quantenmechanisch durch Tunneln: die Wellenfunktion des α -Teilchens durchdringt den klassisch verbotenen Bereich.



- Aus Quantenmechanik: Transmissionswahrscheinlichkeit für Kastenpotenzial

$$W(E) = \exp\left\{-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}\right\} \quad (\text{Näherung})$$

Kontinuierliche Potenzialbarriere:



$$W(E) = \prod_{i=1} W_i(E) = \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{2m(V(x) - E)} \right\} = e^{-2G}$$

G : Gamov-Faktor

- Anwenden auf α -Zerfall:

$$x_1 = R \quad (\text{Kernradius})$$

$$x_2 = \frac{2\alpha(Z-2)\hbar c}{E} b \quad (\text{klassischer Umkehrpunkt})$$

$$\begin{aligned} 2G &= \frac{2}{\hbar} \int_R^b dr \sqrt{2m(V_0(r) - E)} = \frac{2}{\hbar} \sqrt{2mE} \int_R^b dr \sqrt{\frac{b}{r} - 1} = \\ &= \frac{2}{\hbar} \sqrt{2mEb} \underbrace{\left\{ \arccos \sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b} - \frac{R^2}{b^2}} \right\}}_{\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R}{b}}} \end{aligned}$$

für $b \gg R$.

- Tunnelwahrscheinlichkeit:

$$W(E) = \exp \left\{ -\frac{2\pi\alpha\hbar c}{\hbar} \sqrt{2m} \left(\frac{Z-2}{\sqrt{E}} - \frac{\sqrt{8R(Z-2)}}{\pi\sqrt{\alpha\hbar c}} \right) \right\}$$

Halbwertszeit $T_{1/2}$ des Kerns ist umgekehrt proportional zu $W(E)$:

$$\frac{1}{T_{1/2}} \approx W(E) w_\alpha \frac{v_0}{2R}$$

w_α : Wahrscheinlichkeit, α im Kern zu finden

$v_0/(2R)$: Häufigkeit der Stöße an die Barriere

$v_0 = 0,1c$: α -Geschwindigkeit

$$\log T_{1/2} \sim \frac{1}{\sqrt{E}} \quad \text{Geiger-Nuttall-Regel, 1911}$$

Gilt empirisch für $T_{1/2}$, die innerhalb mehr als 20 Größenordnungen variieren:

experimentell gemessen $10^{-8} \text{ s} < T_{1/2}(\alpha\text{-Zerfall}) < 10^{17} \text{ a}$.

- Die meisten α -Strahler sind schwerer als Pb ($Z=82$)
- Bei leichteren Kernen $A \approx 240$ ist der α -Zerfall energetisch möglich; die freiwerdende Energie ist aber so klein und damit die Lebensdauer so groß, dass solcher Zerfall i.A. unbeobachtbar ist.

Beispiel: ${}^{238}_{92}\text{U}$ -Zerfall; Uran und radioaktive Töchter im Gestein

- ${}^{222}_{86}\text{Rn}$ Edelgas \rightarrow Lunge
 α -Zerfall von ${}^{222}\text{Rn}$ verursacht ca. 40% der natürlichen Strahlenbelastung

- Tunnelwahrscheinlichkeit:

$$W(E) = \exp\left\{-\frac{\pi Z_1 Z_2 \alpha}{c} \sqrt{\frac{2m}{E}}\right\}$$

ist auch für umgekehrten Prozess, Fusion zweier Kerne mit Z_1 und Z_2 von Bedeutung. Niedrige Kernladungen Z bevorzugt (Wasserstoff, ...), z.B.:

- ${}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{He} + n$ (3,27 MeV)
- ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + n$ (17,6 MeV) (wird bei kontrollierter Fusion verwendet)
- $p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e$ nicht geeignet wegen kleiner Reaktionsraten aufgrund der starken WW
- Beginn des Fusionszyklus in Sternen

3.2 Beta-Zerfall von Kernen

Wir betrachten Kerne mit gleicher Massenzahl A (sog. Isobare)
 Schreibe die Atommasse (gemäß Bethe-Weizsäcker-Massenformel) als

$$M(A, Z) = \alpha A - \beta Z + \gamma Z^2 + \frac{\delta}{A^{(1/2)}}$$

mit $\alpha = M_n - a_v + a_s A^{-1/3} + \frac{a_{sym}}{4}$

$$\beta = a_{sym} + M_n - M_p - m_e$$

$$\gamma = \frac{a_{sym}}{A} + \frac{a_{coul}}{A^{1/3}} > 0$$

$$\delta = \begin{cases} -11.2 \text{ MeV} & \text{gg-Kerne } N \text{ und } Z \text{ gerade} \\ 0 \text{ MeV} & \text{ug-Kerne } A \text{ ungerade} \\ +11.2 \text{ MeV} & \text{uu-Kerne } N \text{ und } Z \text{ gerade} \end{cases}$$

Quadratische Funktion der Kernladungszahl $Z \Rightarrow$ Parabel: Minimum bei $Z = \beta(Z)$

A ist ungerade: eine Parabel, ug-Kerne mit $\delta = 0$

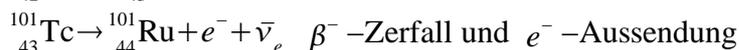
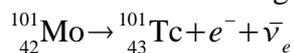
A ist gerade: zwei Parabeln, um doppelte Paarungsenergie $2|\delta|/\sqrt{A}$ verschoben. Gg-Kerne ($\delta < 0$), uu-Kerne ($\delta > 0$)

Beta-Zerfall in ungeraden Kernen

Beispiel: β^- -Zerfall von $A=101$ Kernen

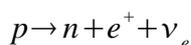
Minimum der Massenparabel beim Ruthetium-Isotop $^{101}_{44}\text{Ru}$ mit $Z=44$

- Isobare mit mehr Neutronen zerfallen durch die Umwandlung $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ in einen Kern mit um 1 erhöhter Ladungszahl Z .

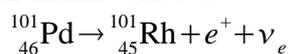


Allgemeine Bedingung für β^- -Zerfall: $M(A, Z) > M(A, Z+1)$ (Elektronmasse bereits berücksichtigt)

- Isobare mit Protonenüberschuß zerfallen durch Protonenumwandlung **im Kern**



Z nimmt um 1 ab.



Bedingung für β^+ -Zerfall: $M(A, Z) > M(A, Z-1) + 2m_e c^2$
(überschüssiges Elektron und Positron)

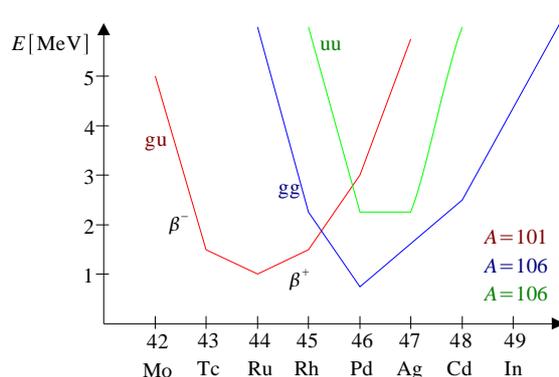
Beta-Zerfall in geraden Kernen

gg-Kerne und uu-Kerne auf 2 getrennten Parabeln

$$\Delta E = 2|\delta|/\sqrt{A} \quad (\text{Paarungsenergie})$$

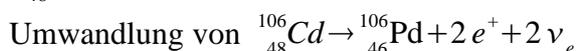
Es gibt oft mehr als ein beta-stabiles Isobar ($A > 70$)

Beispiel:



$^{106}_{46}\text{Pd}$ ist das stabilste Isobar

$^{106}_{48}\text{Cd}$ ist auch beta-stabil, da benachbarte uu-Kerne höher in Energie liegen



Zweite Ordnung schwache WW, sehr kleine Wahrscheinlichkeit, $^{106}_{48}\text{Cd}$ kann als stabil betrachtet werden.

Alle uu-Kerne haben mindestens einen stärker gebundenen gg-Kern im Isobarenspektrum.

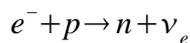
Ausnahmen: sehr kleine Kerne

uu-Kerne sind im Allgemeinen instabil.

(N=Z)-Kerne: Zunahme an Asymmetrie-Energie ist stärker als Gewinn an Paarungsenergie

Elektronen-Einfang

Elektronen der Atomhülle in s-Zuständen der inneren Schalen haben eine hohe Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Kerninneren (k-Schalen-Elektronen)
Proton und Hüllenelektron können sich an der Reaktion



in Neutron und Neutrino umwandeln.

Vor allem bei schweren Kernen mit großem Kernradius und kleinen Elektronenbahnen \Leftrightarrow großer Überlapp der Wellenfunktionen.

k-Einfang geschieht, tiefgebundenes k-Elektron fehlt in der Hülle, Elektronen aus höheren Energieniveaus kaskadieren sukzessive hinunter, wobei charakteristische Röntgenstrahlung entsteht.

Elektron-Einfang konkurriert mit β^{+} -Zerfall (gleicher Tochterkern als Endzustand)

Bedingung für Elektroneneinfang (energetisch): $M(A, Z) > M(A, Z-1) + \epsilon$
 ϵ = Anregungsenergie der Atomhülle des Tochterkerns

Im Vergleich zum β^{+} -Zerfall steht beim k-Einfang ein Mehr an kinetischer Energie von $2m_e c^2 - \epsilon$ zur Verfügung.

Es gibt Fälle in denen die Massendifferenz zwischen Anfangs- und Endatom so klein ist, dass β^{+} -Zerfall nicht mehr stattfinden kann, wohl aber Elektroneneinfang.

Typische Beta-Zerfalls-Lebensdauern

Neutron: $n \rightarrow p + e^{-} + \bar{\nu}_e$: $\tau_n = (885,8 \pm 0,9) \text{ sec}$

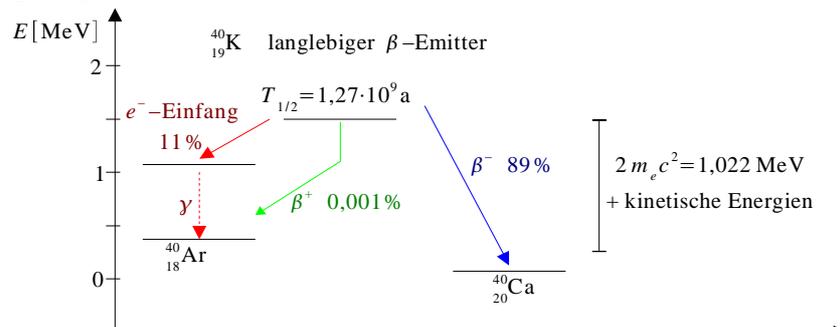
Kern- β -Zerfälle: $\tau_{\beta} = 10^{-3} \dots 10^{16}$ Jahre

Dieser gewaltige Bereich liegt u.a. am **Phasenraum** und der sog. Sargent-Regel

$$\tau_{\beta} \sim E_{\beta}^{-5} \quad E_{\beta} = \text{maximal freiwerdende Elektronenenergie}$$

Ableitung später: schwache WW

Beispiel: ${}^{40}_{19}\text{K}$ langlebiger β -Emitter



β^+ , β^- -Zerfall und e^- -Einfang konkurrieren miteinander, stabile Tochterkerne: ${}^{40}_{18}\text{Ar}$ und ${}^{40}_{20}\text{Ca}$

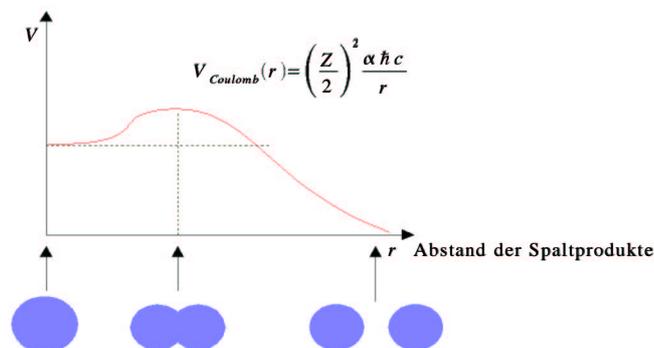
- Zerfall von ${}^{40}_{19}\text{K}$ im Körper trägt 16% zur natürlichen Strahlenbelastung bei.
- Kalium ist ein lebensnotwendiges Element, (Reizleitung im Nervensystem), radioaktives Kalium ${}^{40}_{19}\text{K}$ kommt zu 0,01% im natürlichen Kalium vor.

3.3 Kernspaltung

Spontane Spaltung

Bindungsenergie pro Nukleon maximal für Kerne im Bereich von ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ und fällt mit steigender Kernmasse.

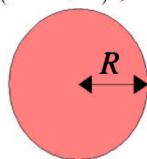
Kerne mit $Z > 40$ können im Prinzip spalten. Potentialbarriere, die durchtunnelt werden muss, ist allerdings so groß, dass spontane Spaltung sehr unwahrscheinlich ist.



Quantitative Betrachtung: Ab welcher Kernladung überwiegt Coulombabstoßung der Protonen die anziehende Kernkraft?

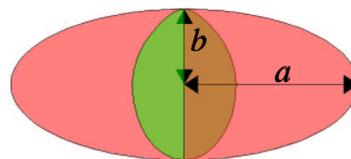
Bei Verformung des Kerns **steigt Oberflächenenergie** während **Coulombenergie abnimmt**. Wenn Verformung zu energetisch günstigeren Zustand führt, ist der Kern instabil. Verforme bei konstantem Volumen kugelförmigen Kern (Radius R) in ein Ellipsoid mit den Achsen

$$a = R(1 + \epsilon), b = R(1 - \epsilon/2), \epsilon \ll 1$$



$$\frac{4}{3} \pi R^3$$

=



$$\frac{4}{3} \pi a^2 b = \text{konstantes Volumen}$$

$$\text{Oberflächenenergie: } E_s = a_s A^{2/3} \left(1 + \frac{2}{5} \epsilon^2 + \dots \right)$$

$$\text{Coulombenergie: } a_{coul} Z^2 / A^{-1/3} \left(1 - \frac{\epsilon^2}{5} \dots \right)$$

Änderung der Gesamtenergie bei Deformation ϵ

$$\Delta E = E(\epsilon) - E(0) = \frac{\epsilon^2}{5} (2 a_s A^{2/3} - a_{coul} Z^2 A^{-1/3})$$

ΔE negativ \rightarrow Energiegewinn \rightarrow Spaltbarriere verschwindet falls $\frac{Z^2}{A} \geq \frac{Z a_s}{a_{coul}} = 48$

Spontane Spaltung für Kerne mit $Z \geq 114, A > 270$

Induzierte Spaltung

Bei schweren Kernen ($Z=92$, Uran) beträgt Spaltbarriere etwa 6 MeV. Sie kann **künstlich** überwunden werden durch Beschuss mit Neutronen. Durch Neutroneneinfangreaktionen gerät der Kern in einen angeregten Zustand oberhalb der Spaltbarriere und spaltet sich \rightarrow **Induzierte Spaltung**

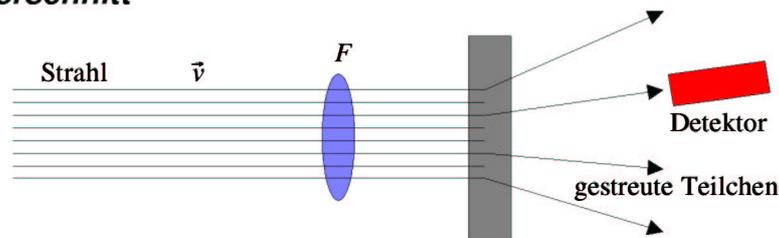
Bei Neutroneneinfang an ungeraden Kernen wird neben der Bindungsenergie zusätzlich die Paarungsenergie frei. Dies führt zu **entscheidenden Unterschieden** in Spaltbarkeit von Nukliden.

- Bei n-Einfang an ${}_{92}^{238}\text{U}$ werden 4,9 MeV Bindungsenergie frei, Spaltbarriere von ${}_{92}^{239}\text{U}$ beträgt dagegen 5,5 MeV. Kinetische Energie der Neutronen muss die Differenz ausgleichen („schnelle Neutronen“).
Aber Reaktionswahrscheinlichkeit ist proportional zu $1/v$ (v = Neutronengeschwindigkeit) und daher sehr klein.
- Bei n-Einfang am ${}_{92}^{235}\text{U}$ werden 6,4 MeV frei. Die Spaltbarriere von ${}_{92}^{236}\text{U}$ beträgt nur 5,5 MeV. ${}_{92}^{235}\text{U}$ lässt sich mit niederenergetischen (thermischen) Neutronen ($E_{kin} < 1 \text{ eV}$) splaten, und wird in Kernreaktoren und Kernwaffen verwendet.
Ebenso sind ${}_{90}^{233}\text{Th}$ und ${}_{96}^{239}\text{Pu}$ geeignete Spaltmaterialien.

4. Streuprozesse

Streuexperimente mit Teilchenstrahlen ($e^\pm, \mu^\pm, p, n, \pi^\pm, \gamma$) sind **das Mittel** zur Untersuchung der Struktur von Atomkernen, Nukleon und anderen Teilchen: Die Verteilung der gestreuten Teilchen erlaubt Rückschlüsse über die zwischen Projektil und Target wirkenden Kräfte (\Rightarrow Wechselwirkungen)

4.1 Wirkungsquerschnitt



- Fluss des Strahls $J_a = n_a \cdot v_a = \frac{N_a}{F} = \frac{\text{Zahl der Projektil-Teilchen}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}$
Dichte Geschwindigkeit Querschnittsfläche

- Zahl der Target-Teilchen innerhalb des Strahlquerschnitts

$$N_b = n_b \cdot F \cdot d$$
Dichte Target-Dicke

- Luminosität

$$L = J_a \cdot N_b \quad [\text{m}^{-2} \text{sec}^{-1}]$$

- Reaktionsrate (Messgröße) $[\text{sec}^{-1}]$

$$R = L \cdot \sigma_r$$

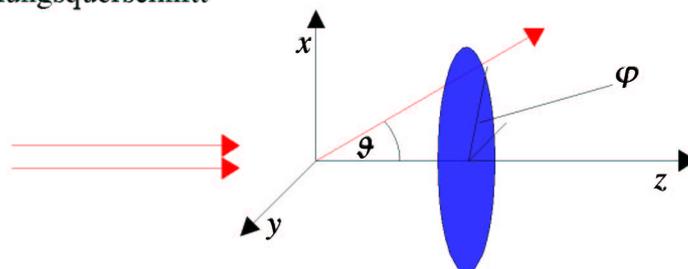
σ_r ist der Wirkungsquerschnitt für eine Reaktion r

Einheit einer Fläche $[\text{m}^2]$

In der Teilchenphysik übliche Einheit: barn $1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2 = 100 \text{ fm}^2$

$1 \text{ mb} = 10^{-3} \text{ b}$, $1 \mu\text{b} = 10^{-6} \text{ b}$, $1 \text{ nb} = 10^{-9} \text{ b}$

- Differentieller Wirkungsquerschnitt



Raumwinkelelement: $\Delta \Omega = \Delta \varphi \Delta \vartheta \sin \vartheta$

Zahl der pro Zeit ins Raumwinkelelement $\Delta \Omega$ gestreute Teilchen

$$\Delta R = L \frac{d\sigma_r}{d\Omega} \cdot \Delta \Omega$$

diff. Wirkungsq.

Reaktionsquerschnitt

$$\sigma_r = \int_{S^2} d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi \int_{-1}^1 d\cos\vartheta \frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta, \dots)$$

- Totaler Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{tot} = \sum_r \sigma_r$$

r kennzeichnet mögliche Reaktionskanäle

- Klassifizierung

$$a + b \rightarrow a + b$$

elastische Streuung (z.B. $\pi N \rightarrow \pi N$, $e^- p \rightarrow e^- p$)

$$a + b \rightarrow \text{alle anderen Prozesse}$$

inelastische Streuung (z.B. $\pi N \rightarrow \pi \pi N$, $e^- p \rightarrow e^- X$)

4.2 Relativistische Kinematik von Streuprozessen

Teilchen a (Projektil) und Teilchen b (Target) sind durch 4-Impulse charakterisiert.

$$p_a^\mu = \left(\frac{E_a}{c}, \vec{p}_a \right), p_b^\mu = \left(\frac{E_b}{c}, \vec{p}_b \right)$$

- Verfügbare Gesamtenergie W

$$W = c \sqrt{S}, \quad S = (P_a^\mu + P_b^\mu)^2 = \frac{1}{c^2} (E_a + E_b)^2 - (\vec{P}_a + \vec{P}_b)^2 \quad \text{Lorentz-Invariante}$$

Laborsystem:

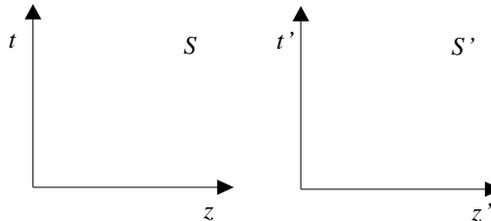
$$S = \begin{pmatrix} E_a/c + m_b c \\ \vec{P}_a \end{pmatrix}^2 = (m_a^2 + m_b^2) c^2 + 2 E_a m_b$$

Schwerpunktsystem:

$$S = \begin{pmatrix} E_a^*/c + E_b^*/c \\ \vec{P}_a^* + \vec{P}_b^* = 0 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{c^2} (E_a^* + E_b^*)^2$$

$$W = \sqrt{(m_a^2 + m_b^2) c^4 + 2 E_a^{(lab)} m_b c^2} = E_a^* + E_b^*$$

- Lorentz-Transformation



Inertialsystem S' bewege sich relativ zum Inertialsystem S mit der Geschwindigkeit v entlang der positiven z-Achse.

$$\begin{pmatrix} ct' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma - \gamma\beta & \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x' = x \\ y' = y \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{mit } \beta = \frac{v}{c} < 1 \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{matrix}$$

- Lorentz-Transformation von Energie und Impuls

$$\begin{pmatrix} E'/c \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma - \gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E/c \\ p_z \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} p'_x = p_x \\ p'_y = p_y \end{matrix}$$

- Lorentztransformation von Laborsystem (L) ins Schwerpunktsystem (M)
Impulse:

$$p_a^* = \gamma \left(P_L - \frac{v}{c^2} E_L \right) \quad p_b^* = -m_b v \gamma$$

$$0 = P_L - \frac{v}{c^2} E_L - m_b v \Rightarrow \beta = \frac{v}{c} = \frac{P_L c}{E_L + m_b c^2}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E_L + m_b c^2}{\sqrt{(E_L + m_b c^2)^2 - P_L^2 c^2}} \Rightarrow \gamma = \frac{E_L + m_b c^2}{W} > 1$$

- Transformation des Streuwinkel

$$a + b \rightarrow d + \dots$$

Impuls des Teilchens d im **Laborsystem**:

$$\vec{p}_d = (0, p_d \sin \vartheta_L, p_d \cos \vartheta_L)$$

Lorentz-Transformation ins **CM-System**:

$$\vec{p}_d^* = (0, p_d \sin \vartheta_L, \gamma (p_d \cos \vartheta_L - \frac{v}{c^2} E_d)) = (0, p_d^* \sin \vartheta_{CM}, p_d^* \cos \vartheta_{CM})$$

$$\tan \vartheta_{CM} = \frac{\sin \vartheta_L}{\gamma \left(\cos \vartheta_L - \frac{v}{c^2} \frac{E_d}{P_d} \right)}$$

Funktion der Energie E_d

$$\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma \quad \text{isotrop im CM-System; vorwärtsgepeakt im bewegten System}$$

4.3 Reaktionswahrscheinlichkeit und Fermi's Goldene Regel

- Quantenmechanisch wird eine Reaktion (z.B. Streuprozess) beschrieben durch:
 H_{int} : Hamiltonoperator der Wechselwirkung

ψ_i, ψ_f : (Normierte) Wellenfunktionen des Anfangs- und Endzustands

- Übergangsamplitude

$$M_{fi} = \langle \psi_f | H_{\text{int}} | \psi_i \rangle = \int dV \psi_f^*(\vec{r}) H_{\text{int}}(\vec{r}) \psi_i(\vec{r}) \quad (\text{Ortsdarstellung})$$

- Fermi's Goldene Regel (zeitabhängige Störungstheorie)

Übergangsrate pro Target-Teilchen und pro einfallendes Strahlteilchen

$$W_{i \rightarrow f} = 2 \frac{\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \delta(E_f)$$

mit $\delta(E) = \frac{dn}{dE}$ der Dichte der Endzustände

- Freie Teilchen besitzen im Impuls-Orts-Phasenraum das Volumen $h^3 = (2\pi\hbar)^3$ (Unschärfe-

Beziehung)

Impulsbetrag $|\vec{p}|$ liege im Intervall $[p, p+dp]$

$$dn = \frac{V 4 \pi p^2}{(2 \pi \hbar)^3} dp$$

- Energie-Impulsbeziehung

$$dE = v dp$$

gilt nichtrelativistisch als auch relativistisch

N.R.: $E = \frac{p^2}{2M}, dE = \frac{p}{M} dp = v dp \quad p = M \cdot v$

R.: $E = \sqrt{M^2 c^4 + p^2 c^2}, dE = \frac{pc dp}{\sqrt{M^2 c^2 + p^2}} = v dp$

$$p = \frac{Mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; \quad p^2(c^2-v^2) = M^2 v^2 c^2; \quad v^2 = \frac{p^2(c^2-v^2)}{M^2 c^2}$$

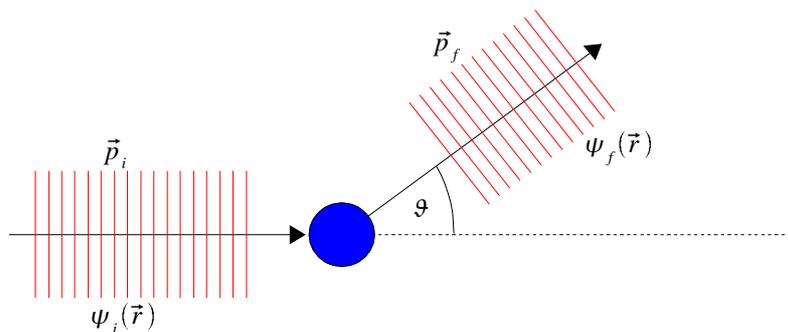
- Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{i \rightarrow f} = \frac{\text{Reaktionsrate } R}{\text{Luminosität } L} = \frac{N_a N_b W_{i \rightarrow f}}{N_b N_a v_a / \text{Vol}} = \frac{2 \pi}{\hbar v_a} |M_{fi}|^2 \delta(E_f) \cdot \text{Vol}$$

Volumen Vol wird im Endergebnis herausfallen

4.4 Elastische Streuung an einem Potential

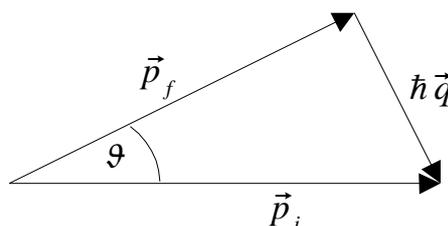
$H_{\text{int}} = U(\vec{v})$ Wechselwirkungspotential



Normierte Wellenfunktionen:

$$\Psi_i(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\text{Vol}}} e^{i \vec{p}_i \vec{r} / \hbar}; \quad \Psi_f(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\text{Vol}}} e^{i \vec{p}_f \vec{r} / \hbar} \Rightarrow \int_{\text{Vol}} dV |\Psi_{i,f}(r)|^2 = 1$$

deswegen $1/\sqrt{\text{Vol}}$ -Faktoren



Übergangsmatrixelement

$$M_{fi} = \langle PIS_f | H_{\text{int}} | \Psi_i \rangle = \frac{1}{\text{Vol}} \int d^3 r e^{-i \vec{p}_f \vec{r} / \hbar} U(\vec{r}) e^{i \vec{p}_i \vec{r} / \hbar} = \frac{1}{\text{Vol}} \int d^3 r e^{i \vec{q} \vec{r}} U(\vec{r})^{\text{Vol}}$$

Fouriertransformierte des Potentials

$$\hbar \vec{q} = \vec{p}_i - \vec{p}_f \quad \text{Impulsübertrag (kein Energieübertrag } M_{\text{target}} \rightarrow \infty)$$

$$|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f| =: p$$

$$\hbar q = 2 p \sin \frac{\vartheta}{2} \quad \vartheta = \text{Streuwinkel}$$

Dichte der Endzustände im Impulsintervall $[p, p+dp]$ und Raumwinkelement $d\Omega$

$$dn = \frac{\text{Vol } p^2}{(2\pi\hbar)^3} dp d\Omega = \frac{\text{Vol } p^2}{(2\pi\hbar)^3 V} dE d\Omega$$

$$\frac{d\rho}{d\Omega} = \frac{dn}{dE d\Omega} = \frac{\text{Vol } p^2}{v(2\pi\hbar)^3}$$

differentieller Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar V} |M_{fi}|^2 \frac{\text{Vol}^2 p^2}{V(2\pi\hbar)^3}, \quad p = mv$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{4\pi^2 \hbar^4} \left| \int d^3 r e^{i \vec{q} \vec{r}} U(\vec{r}) \right|^2 = |f_{\text{Born}}(\vartheta, E)|^2$$

Streuamplitude in Born'scher Näherung

$$f_{\text{Born}}(\vartheta, E) = \frac{-m}{2\pi\hbar^2} \int d^3 r e^{i \vec{q} \vec{r}} U(\vec{r})$$

4.5 Beispiele: Streuung am Yukawa- und Coulombpotential

Betrachte Streuung nichtrelativistischer Teilchen (Masse m , $E_{nr} = \vec{p}^2/2m$) in Born'scher Näherung am sog. Yukawa- oder abgeschirmten Coulombpotential.

$$U(\vec{r}) = \frac{\lambda}{r} e^{-\mu r} \quad r = |\vec{r}|, \quad \mu^{-1} = \text{Abschirmlänge}$$

Es gilt für die Fouriertransformierte einer radialsymmetrischen Funktion

$$\int d^3 r e^{i \vec{q} \vec{r}} U(r) = 2\pi \int_0^\infty dr r^2 U(r) \int_{-1}^{+1} d \cos \vartheta e^{i q r \cos \vartheta} = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty dr \sin(qr) U(r)$$

In unserem Fall:

$$\frac{4\pi}{q} \lambda \int_0^\infty dr e^{r(-\mu+iq)} = \frac{4\pi\lambda}{q} \Im \frac{-1}{-\mu+iq} = \frac{4\pi\lambda}{\mu^2+q^2}$$

Somit lautet der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4 \frac{m^2}{\hbar^4} \left(\frac{\lambda}{\mu^2 + q^2} \right)^2 \quad \text{mit} \quad \hbar q = 2 p \sin \frac{\vartheta}{2}$$

Coulombstreuung eines nichtrelativistischen Punktteilchens mit Ladung $Z_1 e$ am Coulomb-Potential einer Punktladung

$$U(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4 \pi r}$$

Es ergibt sich die Rutherford-Formel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4 m^2 Z_1^2 Z_2^2 \alpha^2 \hbar^2 c^2}{\hbar^{-4} 16 p^4 \sin^4(\vartheta/2)}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}}^{\text{N.R.}} = \left(\frac{Z_1 Z_2 \alpha \hbar c}{4 E_{\text{kin}}} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)}$$

Für hohe Energien gilt: $\left(\frac{p}{v} \right)^2 \rightarrow \frac{E^2}{c^4}$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}}^{\text{relat.}} = \left(\frac{Z_1 Z_2 \alpha \hbar c}{2 E_{\text{kin}} \sin^2(\vartheta/2)} \right)^2$$

4.6 Wechselwirkung durch Austausch virtueller Teilchen

Potentielle Energie einer Ladungsverteilung $\rho_1(\vec{r})$ im Potential $\Phi_2(\vec{r})$ erzeugt von einer anderen Ladungsverteilung $\rho_2(\vec{r})$.

$$U_{\text{pot}} = \int d^3 r \rho_1(\vec{r}) \Phi_2(\vec{r}) = \int d^3 r \int d^3 r' \rho_1(\vec{r}) G(\vec{r}, \vec{r}') \rho_2(\vec{r}')$$

Das Potential $\Phi_2(\vec{r})$ erfüllt die Poisson-Gleichung $\vec{\nabla}^2 \Phi_2(\vec{r}) = \rho_2(\vec{r})$ (Elektrostatik) mit Lösung

$$\Phi_2(\vec{r}) = \int d^3 r' \frac{\rho_2(\vec{r}')}{4 \pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Wir haben die Green'sche Funktion: $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4 \pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$, welche $\vec{\nabla}_r^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$ erfüllt.

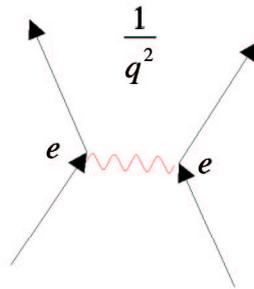
Beispiel: Zwei positive Punktladungen

$$\rho_{1,2}(\vec{r}) = e \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_{1,2})$$

$$U_{\text{pot}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{e^2}{4 \pi |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$$M_{fi} = \int d^3 r e^{i\vec{q}\vec{r}} \frac{e^2}{4 \pi |\vec{r}|} = \frac{e^2}{q^2}$$

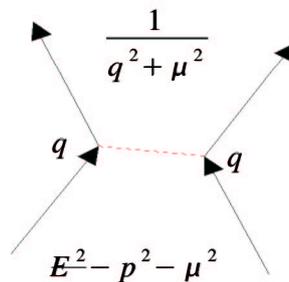
Aufgrund der Energie-Zeit und Impuls-Orts-Unschärfebeziehungen braucht für virtuelle Teilchen



$E^2 = m^2 + \vec{p}^2$ nicht gelten.

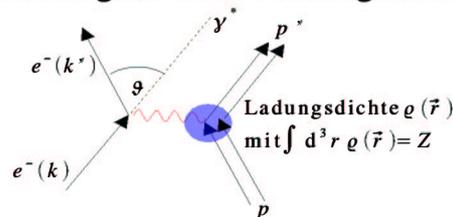
Das ausgetauschte **virtuelle Photon** hat Energie $E=0$ und Impuls $\vec{q} \neq 0$.

Yukawa-Potential $U(r) = \frac{-g}{4\pi r} e^{-\mu r}$, $M_{fi} \sim \frac{-g^2}{\mu^2 + q^2}$



Austausch eines virtuellen massiven Teilchens ($E=0$, \vec{q}) der Masse $\frac{\mu \cdot \hbar}{c}$

4.7 Elastische Elektronenstreuung an einer Ladungsverteilung



Viererimpulse

$$k + p = k' + p', \quad k^2 = k'^2 = m_e^2 \simeq 0 \quad p^2 = p'^2 = M^2$$

Berechne Rückstoßenergie E' des Elektrons

$$S = (p + \hbar k)^2 = |p' + \hbar k'|^2 = M^2 + m_e^2 + 2pk = M^2 + m_e^2 + 2p'k'$$

$$k \cdot p = k' \cdot p' = k' \cdot (k + p - k') = k k' + k' p - m_e^2$$

ruhendes Target $p^\mu = (M \sigma)$

$$k^\mu = (E, \vec{k}), \quad k'^\mu = (E', \vec{k}')$$

$$ME = EE' - \vec{k} \cdot \vec{k}' + ME' = ME' + EE' (1 - \cos \vartheta)$$

$$\text{Auflösung nach } E': \quad E' = \frac{E}{1 + E/Mc^2(1 - \cos \vartheta)}$$

Wellenlängenänderung bei Compton-Effekt: $\Delta \lambda = h/m_e c (1 - \cos \vartheta)$

Differentieller Wirkungsquerschnitt und Formfaktor

- für relativistische Elektronen $\left(\frac{p}{v}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{E'}{c}\right)^2$ E' : Energie des e^- im **Endzustand**

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{E'}{2\pi\hbar^2 c}\right)^2 \left| \int d^3 r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} U(\vec{r}) \right|^2, \quad \vec{q} = \vec{U} - \vec{U}'$$

- Wechselwirkungspotential des punktförmigen Elektrons mit der ausgedehnten Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$

$$U(\vec{r}) = -e^2 \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Berechne seine Fouriertransformierte

$$\begin{aligned} \int d^3 r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} U(\vec{r}) &= -e^2 \int d^3 r' \int d^3 r'' \frac{e^{i\vec{q}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \cdot e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'} \rho(\vec{r}') \\ &= -e^2 \left(\int d^3 r'' \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}''}}{4\pi|\vec{r}''|} \right) \cdot \left(\int d^3 r' e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'} \rho(\vec{r}') \right) = \frac{-e^2}{q^2} Z F(\vec{q}) \end{aligned}$$

- Definition des Formfaktors

$$F(\vec{q}) = \frac{1}{Z} \int d^3 r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho(\vec{r})$$

Normierung: $F(0) = 1$

$$Z = \int d^3 r \rho(\vec{r}) = \text{Gesamtladung}$$

- mit $\hbar^2 q^2 = (\vec{k} - \vec{k}')^2 = 2EE'(1 - \cos\vartheta) = 4EE' \sin^2 \vartheta / 2$

Wir erhalten

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Punkt}} |F(\vec{q})|^2$$

wobei $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Punkt}}$ der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung an einer Punktladung ist.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Punkt}} = \frac{Z^2 \alpha^2 \hbar^2 c^2}{4E^2 \sin^4 \vartheta / 2}$$

noch unvollständig; Elektron hat Spin $1/2 \rightarrow$ bringt Zusatzfaktor $(1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta / 2)$
Mott-Querschnitt, Rückwärtsstreuung ist unterdrückt

Eigenschaften von Formfaktoren

- $F(\vec{q}=0) = \frac{1}{Z} \int d^3 r \rho(\vec{r}) = 1$

- kugelsym. Ladungsdichte $\varrho(\vec{r}) = Z f(r)$

$$F(q^2) = 4 \frac{\pi}{q} \int_0^\infty dr r \sin qr f(r), \text{ hängt nur von } q^2 \text{ ab.}$$

$$F(q^2) = 4 \frac{\pi}{q} \int_0^\infty dr r (qr - \frac{1}{6} q^3 r^3 + \dots) f(r) = 1 - \frac{q^2}{6} 4 \pi \int_0^\infty dr r^4 \varrho(r) + \dots$$

mittlerer quadratischer Radius

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{Z} \int d^3 r r^2 \varrho(\vec{r}) \text{ ist gegeben durch}$$

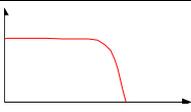
$$\langle r^2 \rangle = -6 \frac{dF(q^2)}{dq^2} \Big|_{q^2=0}$$

Beispiel: homogen geladene Kugel:

$$f(r) = \frac{3}{4\pi R} \text{ für } r < R \text{ sonst } 0$$

$$\text{besitzt den Formfaktor } F(q^2) = \frac{3}{(qR)^3} [\sin qR - qR \cos qR], \langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} R^2$$

Nullstelle von $F(q^2)$ bei $qR \approx 4,5$ bedingt ein Belegungsminimum bei $q = 4,5/R$.

| Ladungsverteilung | $f(r)$ | Formfaktor $F(a^2)$ | |
|-------------------------|---|---|---|
| Punkt | $\delta^3(\vec{r})$ | 1 | Elektrons |
| exponentiell | $\frac{a^3}{8\pi} e^{-ar}$ | $\left(1 + \frac{q^2}{a^2}\right)^{-2}$ (Dipol) | Proton |
| Gauß | $\frac{a^3}{(2\pi)^{3/2}} e^{-a^2 r^2/2}$ | $e^{-q^2/2a^2}$ | ${}^6_3\text{Li}$ |
| Stufenfunktion | $U(R \vec{r})$ | oszillierend | ${}^{40}_{20}\text{Ca}, {}^{208}_{82}\text{Pb}$ |
| Kugel mit diffusen Rand |  | oszillierender Formfaktor | ${}^{40}_{20}\text{Ca}, {}^{208}_{82}\text{Pb}$ |

Mottstreuung

Ziel: Bestimmung des Formfaktors aus $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Punkt}} \cdot |F(\vec{q})|^2$

- Rutherfordstreuung: spinloses Target, spinloses Projektil $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Punkt}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}}$

- Mottstreuung: spinloses Target, Elektronen ($s = \frac{1}{2}$) als Projektil $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Punkt}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}$

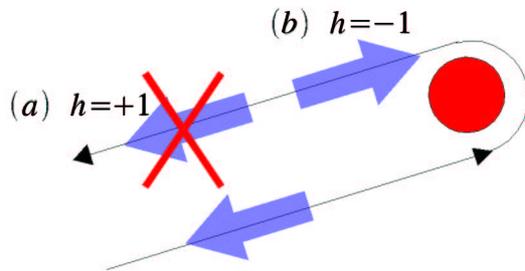
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} \cdot \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right)$$

Plausibilität des Faktors $\cos^2 \frac{\vartheta}{2}$: Vorgriff auf späteres Ergebnis (e.m. WW, Diractheorie)

Für $\beta \rightarrow 1$ bleibt die Helizität, d.h. Die Projektion des Elektronenspins auf die Bewegungsrichtung erhalten.

Für $\beta \rightarrow 1$ (Grenzfall masseloser Elektronen) können Teilchen höchstens 2 Spinzustände besitzen, parallel oder antiparallel zum Impuls.

z.B.



$$h = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{s}| |\vec{p}|} = -1$$

- (a) darf nicht sein, wegen Helizitätserhaltung
- (b) darf nicht sein, wegen Drehimpulserhaltung

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = 0 \quad \text{für } \vartheta = 180^\circ \quad (\text{keine Rückstreuung})$$

Für Target mit Spin ist ein simultaner Spinflip von Elektron und Kern möglich.

4.8 Messung von Formfaktoren aus der Elektronenstreuung

- Welche Elektronenenergie brauchen wir, um die Form von Atomkernen zu untersuchen?

- Impulsübertrag $\hbar \vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$
 \vec{p} : Impuls des e^- vor der Streuung (im Laborsystem)
 \vec{p}' : Impuls des e^- nach der Streuung (im Laborsystem)

- de Broglie $\hbar |\vec{q}| = \frac{\hbar}{\lambda} \left(\lambda = \frac{\lambda}{2\pi} \right)$

- $\hbar c = 200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$

- Bedingung zur Auflösung einer Struktur der Größe r :

$$\hbar |\vec{q}| r > \hbar \Rightarrow \hbar |\vec{q}| c > 200 \text{ MeV} \cdot \text{fm} / r$$

- Bestimmung des maximalen Impulsübertrags:

$$\hbar |\vec{q}| = \sqrt{(\vec{p} - \vec{p}')^2} = \sqrt{p^2 + p'^2 - 2|\vec{p}||\vec{p}'|\cos\vartheta} = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 + E'^2 - 2EE' \cos\vartheta}$$

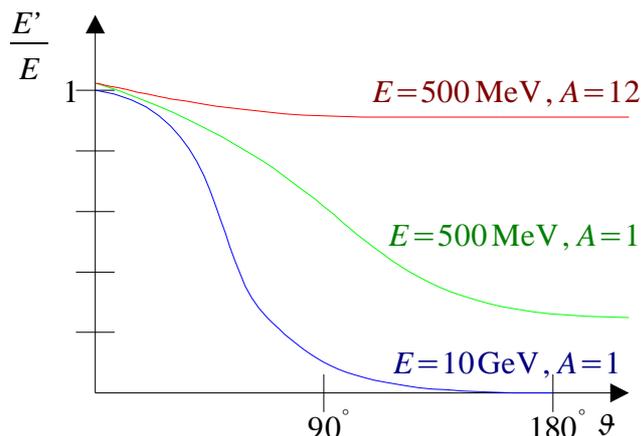
$$(E \simeq |\vec{p}|c, E' \simeq |\vec{p}'|c)$$

$$|\vec{q}|_{\max} = \frac{E + E'_{\min}}{\hbar c}$$

$$E' = \frac{E}{1 + E/Mc^2(1 - \cos \vartheta)} \quad (\text{M: Kernmasse})$$

z.B. $E = 500 \text{ MeV}$

$$E' (A=12) = 460 \text{ MeV}$$



$$|\vec{q}|_{\max} = \frac{960 \text{ MeV}}{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}} = \frac{4,8}{\text{fm}} \quad \text{!Auflösungsbedingung} > \frac{1}{r}$$

Schlussfolgerung:

Da $1 \text{ fm} < r < 10 \text{ fm}$ sind 500 MeV Elektronen gut geeignet, um Formen von Kernen zu untersuchen.

- Messvorschrift zur Bestimmung des Formfaktors spinloser Kerne:

- Bestimme $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{exp}}$ (aus Streuintensität als Funktion des Streuwinkels ϑ).

Mit e^- mit einigen 100 MeV

$$\frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{exp}}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}} = |F(\vec{q})|^2$$

Zur Winkelselektion und Messung des Impulse der gestreuten e^- werden Magnetspektrometer verwendet. (Beispiel: MAMI-B in Mainz)

4.9 Kernradien und Ladungsverteilungen

Fourierbeziehung zwischen Ladungsverteilung $f(r) = \frac{\rho(r)}{z}$ und dem Formfaktor $F(\vec{q})$.

(Born'sche Näherung und vernachlässigbarer Rückstoss)