Ein Skript der Vorlesung

Kompaktvorlesung Elastizitätstheorie

Prof. Helmut Bross
LMU München
WS 2003/2004

31. Januar 2004

von Christoph Moder und Michael Wack
http://www.skriptweb.de
Hinweise (z.B. auf Fehler) bitte per eMail an uns: mail@skriptweb.de – Vielen Dank.

§ 1 Einführung

Kontinuumsmechanik

Kontinuum: Objekte füllen den Raum kontinuierlich aus, wobei die inneren Abstände im Laufe der Zeit sich ändern.

Beispiele: Gase, Flüssigkeiten, feste Stoffe; Hydrodynamik und Elastiztätstheorie

physikalische Eigenschaften werden stetige Funktionen von Ort und Zeit sein; Beispiele:

- Dichte $\varrho(\vec{r}, t)$
- Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r}, t)$
- Temperatur $T(\vec{r}, t)$

§ 2 Verzerrungstensor

a) Lagrangesche und Eulersche Beschreibung eines elastischen Körpers

P sei ein ausgezeichneter Punkt des Körpers
$\vec{r}(x_1, x_2, x_3)$ Ortsvektor in unverformtem Zustand
$\tilde{r}(\tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \tilde{x_3})$ Ortsvektor in unverformtem Zustand

Durch elastische Verformung erfährt der Punkt P die Verschiebung $\vec{u} = \tilde{r} - \vec{r}$, $u_i = \tilde{x_i} - x_i$, $i = 1 \dots \alpha$

Lagrangesche Beschreibung:
$\vec{u}$ und damit $\vec{r}$ sind Funktionen der Koordinaten des unverformten Zustands. D.h. es existiert die stetige und stetig differenzierbare Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \supset K \ni \vec{r} \mapsto \vec{u} \in \mathbb{R}^3$$

$\vec{u} = u(\vec{r})$, $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$
$\tilde{r} = \tilde{r}(\vec{r})$, $\tilde{x_i} = x_i(x_1, x_2, x_3)$

zeitabhängige Probleme, d.h. $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t)$, $\tilde{r} = \vec{r}(\vec{r}, t)$

Sei $f = f(\vec{r}, t)$ eine beliebige skalare Funktion des Orts und der Zeit; zeitliche Veränderung: $(\partial f(\vec{r}, t))/(\partial t)$

Eulersche Beschreibung:
Alle Feldgrößen werden von einem mitbewegten Beobachter gemessen, d.h. es tritt keine Translation auf.
$\vec{u} = u(\tilde{r}, t)$; $\tilde{r}$ ist eine unabhängige Variable; $\vec{r}(\vec{r}, t) = \tilde{r} - u(\vec{r}, t)$
Totales Differenzial für die skalare Funktion $f(\vec{r}, t)$:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial \tilde{x_i}} \frac{\partial \tilde{x_i}}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla} f \dot{\tilde{r}}$$

In statistischer Mechanik:
In der Eulerschen Beschreibung bleibt das Phasenvolumen (d.h. das Volumen im Phasenraum) invariant. In der Hydrodynamik führt die Eulersche Beschreibung zu einfachen Aussagen. Aber in der Elastizitätstheorie bedeutet die Eulersche Beschreibung eine Komplikation. Sie setzt voraus, dass das *elastizitätstheoretische Problem* (Begriff wird später erläutert) gelöst ist; $\vec{r}$ muss bekannt sein.

b) Verzerrungstensor (beliebig große Deformation)

P und P' seien beliebige, benachbarte Punkte im elastischen Körper. Es gilt: $P(\vec{r})$, $P'(\vec{r} + \delta\vec{r})$. $\delta\vec{r}$ wird so klein gewählt, dass nur lineare Glieder zu berücksichtigen sind.

Deformierter Zustand: $P \to \tilde{P}$, $P' \to \tilde{P}'$, die Verschiebung wird angegeben durch die Funktion $\vec{u}$ ($\vec{u}(\vec{r})$ bzw. $\vec{u}(\vec{r} + \delta\vec{r})$).

$$\delta\vec{r} + \vec{u}(\vec{r} + \delta\vec{r}) - \delta\vec{r} - \vec{u}(\vec{r}) = 0$$

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{r} + \vec{u}(\vec{r} + \delta\vec{r}) - \vec{u}(\vec{r})$$

Abbildung $\mathbb{R}^3 \ni \vec{r} \mapsto \vec{u}(\vec{r}) \in \mathbb{R}^3$, stetig und stetig differenzierbar

$$\vec{u}(\vec{r} + \delta\vec{r}) - \vec{u}(\vec{r}) = \delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \vec{u}(\vec{r})$$

$\nabla_{\vec{r}}$: Richtungsableitung

$$u_i(\vec{r} + \delta\vec{r}) - u_i(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \quad \forall i = 1, 2, 3$$

Einsteinsche Summationskonvention: Über doppelt in Produkten vorkommende Indizes wird von 1 bis 3 summiert.

$$u_i(\vec{r} + \delta\vec{r}) - u_i(\vec{r}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$$

$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$: Tensor 2. Stufe (d.h. eine zweidimensionale Matrix mit 3×3 Elementen)

$$d\tilde{x_i} = dx_0 + u_i(\vec{r} + \delta\vec{r}) - u_i(\vec{r}) \quad \forall i = 1, 2, 3$$

Den Ausdruck $u_i(\vec{r} + \delta\vec{r}) - u_i(\vec{r})$ kann man ersetzen durch $(\partial u_i / \partial x_j)\delta x_j$:

$$\delta\tilde{x_i} = \left[\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right] \delta x_j$$

Division durch δx_j führt zur *Jacobi-Matrix* (hier gilt ebenfalls die Summationskonvention):

$$J_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$$

$$\boxed{\delta\tilde{x_i} = J_{ij}\delta x_j}$$

Summenkonvention!

Abstandsquadrat von P und P': $\delta\vec{r} \cdot \delta\vec{r}$
Abstandsquadrat von $\tilde{P}$ und $\tilde{P}'$: $d\vec{r} \cdot \delta\vec{r}$
Diese Abstandsquadrate werden nicht beeinflusst von starrer Translation oder starrer Rotation.

$$\delta\vec{r} \cdot d\vec{r} = \delta\tilde{x_i} d\tilde{x_i} = J_{ij}\delta x_j J_{ik}\delta x_k$$

Änderung des Abstandes ($\delta\vec{r} \cdot \delta\vec{r} = \delta x_i \delta x_i$):

$$\delta\vec{r} \cdot d\vec{r} - \delta\vec{r} \cdot \delta\vec{r} = J_{ij}J_{ik}\delta x_j \delta x_k - \delta x_j \delta x_j = [J_{ij}J_{ik} - \delta_{jk}]\, \delta x_j \delta x_k =: 2\varepsilon_{jk}\delta x_j \delta x_k$$

(Green's) *Verzerrungstensor* (*strain tensor*):

$$\boxed{2\varepsilon_{jk} = J_{ij}J_{ik} - \delta_{jk} \quad \forall j, k \in \{1, 2, 3\}}$$

symmetrischer Tensor 2. Stufe:

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

$$2\varepsilon_{jk} = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) - \delta_{jk}$$

$$2\varepsilon_{jk} = \underbrace{\delta_{ij}\delta_{ik}}_{=\delta_{jk}} + \left(\delta_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \delta_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \delta_{jk} = \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

$$\boxed{\varepsilon_{jk}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}}$$

Gültig für beliebige Verzerrungen; lokale Charakteristiken für Deformation: $(\varepsilon_{jk}) = 0$, $\delta\vec{r} \cdot \delta\vec{r} = d\vec{r} \cdot d\vec{r}$, Abstände verändern sich nicht.
Verifikation:

1. starre Translation: $u_i = const$ unabhängig von $\vec{r}$, d.h. $\partial u_i/\partial x_j = 0$
2. starre Rotation: infinitesimale Rotation

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{\varphi} \times \vec{r}$$

$\vec{\varphi}$: Vektor der Rotation
$\vec{\varphi}/||\vec{\varphi}||$ weist in Richtung der Rotationsachse
$|\vec{\varphi}|$: Drehwinkel

$$\delta\tilde{r} \cdot \delta\tilde{r} = \delta\vec{r} \cdot \delta\vec{r} + \delta\vec{r}(\vec{\varphi} \times \delta\vec{r}) + (\vec{\varphi} \times \delta\vec{r})\delta\vec{r} + (\vec{\varphi} \times \delta\vec{r}) \cdot (\vec{\varphi} \times \delta\vec{r}) = \delta\vec{r} \cdot \delta\vec{r}$$

Spatprodukt: wenn zwei Komponenten gleich sind, ist das Spatprodukt 0

c) Vereinfachung für schwache Verformungen (lineare Elastizitätstheorie)

Anschauliche Interpretation des Verzerrungstensors:
$(\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}(\vec{r})$ beschreibt die Veränderung der Verschiebung, wenn man um $\delta\vec{r}$ weitergeht.

Annahme (lineares Elastizitätstheorem):
Veränderung soll so klein sein, dass quadratische Glieder in $\vec{\nabla}\vec{u}$ vernachlässigt werden können.

$$\boxed{\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)}$$

Verschiebung benachbarter Punkte:

$$(\delta\tilde{r} - \delta\vec{r})_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_j = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)dx_j}_{\text{1. Term}} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)dx_j}_{\text{2. Term}}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) =: \varepsilon_{ijk}\varphi_k$$

antisymmetrisch in i und j, nur 3 Elemente verschieden:

$$\begin{pmatrix} 0 & x & x \\ -x & 0 & x \\ -x & -x & 0 \end{pmatrix}$$

1. Term: starre Rotation um Winkel φ

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)dx_j = \varepsilon_{ijk}\varphi_k\delta x_j = (\delta\vec{r} \times \vec{\varphi})_i$$

2. Term: Verzerrungstensor $\varepsilon_{ij}dx_j$

Anschauliche Interpretation:
betrachte Quader $\{0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq b, 0 \leq x_3 \leq c\}$
Ebene $x = 0$ festgehalten; Ebene $x = a$ wird um δa verschoben (relative Längenänderung $(\delta a)/a$, da der Quader im Ursprung beginnt)
Verschiebungsfeld:

$$u_1(\vec{r}) = \frac{\delta a}{a}x_1, u_2(\vec{r}) = 0, u_3(\vec{r}) = 0$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\delta a}{a}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\delta b}{b}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\delta c}{c}$$

Nichtdiagonalelemente: z.B. Element

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

Realisierung: $u_2 = \tan\varphi \cdot x_1$, $u_1 = \tan\varphi \cdot x_2$, $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\tan\varphi + \tan\varphi) \approx \varphi$

d) Relative Volumenänderung (beliebige Deformation)

Sei δG ein infinitesimal kleiner Quader im elastischen Körper.

$$\delta G = \{0 \leq x_1 \leq \delta x_1, 0 \leq x_2 \leq \delta x_2, 0 \leq x_3 \leq \delta x_3\}$$

Volumen vor der Deformation: $\delta V_0 = \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$
δG wird aufgespannt von den Vektoren $\vec{P_1} : \{\delta x_1, 0, 0\}$, $\vec{P_2} : \{0, \delta x_2, 0\}$, $\vec{P_3} : \{0, 0, \delta x_3\}$.

Unter Deformation:

$$\vec{P_1} \to \tilde{P_1} = \{J_{11}\delta x_1, J_{21}\delta x_1, J_{31}\delta x_1\}$$

$$\vec{P_2} \to \tilde{P_2} = \{J_{12}\delta x_2, J_{22}\delta x_2, J_{32}\delta x_2\}$$

$$\vec{P_3} \to \tilde{P_3} = \{J_{13}\delta x_3, J_{23}\delta x_3, J_{33}\delta x_3\}$$

Volumen im verzerrten Fall:

$$\delta V = \tilde{P_1} \cdot (\tilde{P_2} \times \tilde{P_3}) = \begin{vmatrix} J_{11}\delta x_1 & J_{21}\delta x_1 & J_{31}\delta x_1 \\ J_{12}\delta x_2 & J_{22}\delta x_2 & J_{32}\delta x_2 \\ J_{13}\delta x_3 & J_{23}\delta x_3 & J_{33}\delta x_3 \end{vmatrix} = \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \begin{vmatrix} J_{11} & J_{21} & J_{31} \\ J_{12} & J_{22} & J_{32} \\ J_{13} & J_{23} & J_{33} \end{vmatrix} = \delta V_0 \det|(J_{ik})|$$

Die Determinante der Jacobi-Matrix ist ein Maß für relative Volumenänderung:

$$\boxed{\frac{\delta V}{\delta V_0} \det|(J_{ik})|}$$

Verschiebungsfeld:

$$\vec{u}(\vec{r}) = (u_1(\vec{r}), u_2(\vec{r}), u_3(\vec{r}))$$

Richtungsableitung:

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

Jacobi-Matrix:

$$(J_{ij})$$

$$J_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Verzerrungstensor:

$$(\varepsilon_{jk})$$

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2}(J_{ij}J_{ik} - \delta_{jk})$$

Volumenänderung eines Quaders:
δV_0: Volumen im unverformten Zustand
δV: Volumen im verformten Zustand

$$\frac{\delta V}{\delta V_0} = \det|J_{jk}|$$
$$J_{ij}J_{ik} = \delta_{ik} + 2\varepsilon_{ik}$$
$$\bar{J}^+ \cdot \bar{J} = \bar{1} + 2\bar{\varepsilon}$$

wobei gilt:

$$\bar{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Hilfssätze (lineare Algebra):

- $\bar{A}, \bar{B}$ beliebige 3×3-Matrizen
  $\det(\bar{A} \cdot \bar{B}) = \det(\bar{A}) \det(\bar{B})$
- $\det(\bar{A}^+) = \det(\bar{A})$
  (Schreibweise: $\bar{A}^+$ ist die Transponierte des Vektors $\bar{A}$, d.h. die Elemente sind an der Diagonalen gespiegelt.)

$$\det(\bar{J}^+ \cdot \bar{J}) = \det(\bar{J}^+) \det(\bar{J}) = \left|\det(\bar{J})\right|^2$$
$$\det(\bar{J}) = \sqrt{\det(\bar{1} + 2\bar{\varepsilon})}$$
$$\frac{\delta V}{\delta V_0} = \sqrt{\det(\bar{1} + 2\bar{\varepsilon})}$$

Ableitung einer Hilfsformel:

$$\det(\bar{1} + \lambda\bar{\varepsilon}) = \begin{vmatrix} 1 + \lambda\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & 1 + \lambda\varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 1 + \lambda\varepsilon_{33} \end{vmatrix}$$
$$\det(\bar{1} + \lambda\bar{\varepsilon}) = 1 + \lambda\varepsilon_I + \lambda^2\varepsilon_{II} + \lambda_{III}\varepsilon_{III}$$
$$\varepsilon_I = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = \mathrm{Spur}(\bar{\varepsilon})$$
$$\varepsilon_{22} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{33} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix}$$
$$\det|\bar{\varepsilon}|$$

In §5 [...] wird gezeigt, dass die Wahl von $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$ invariant ist gegen eine orthogonale Transformation der Einheitsbasis.

$$\frac{\delta V}{\delta V_0} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_I + 4\varepsilon_{II} + 8\varepsilon_{III}}$$

streng

Lineares Elastizitätstheorem:

$$\frac{\delta V}{\delta V_0} = 1 + \varepsilon_I = 1 + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 1 + \mathrm{div}\vec{u}$$

Relative Volumenänderung:

$$\frac{\delta V - \delta V_0}{\delta V_0} \approx \varepsilon_I = \mathrm{div}\vec{u}$$

§ 3 Spannungstensor (stress tensor)

a) Definition der Spannung

Lagrangesche Darstellung:
Im unverformten Zustand wird ein infinitesimal kleiner Quader (Seitenlängen: $\delta x_1, \delta x_3, \delta x_3$, ausgerichtet parallel zu den Einheitsvektoren der Basis $\vec{e_i}$) markiert.

$$G_0 = \{0 \leq x_1 \leq \delta x_1, 0 \leq x_2 \leq \delta x_2, 0 \leq x_3 \leq \delta x_3\}$$

Durch Deformation geht G_0 in G über, wobei G im Allgemeinen kein Quader ist. Durch an der Oberfläche δG_0 wirkende Kräfte wird G_0 so verformt, dass er die Gestalt G annimmt. Dabei ist $\vec{F_i}$ die Kraft auf die Fläche mit der Normalen parallel zu $\vec{e_i}$, und $\vec{F_i'}$ die Kraft auf die Fläche (die den Nullpunkt an einer Ecke enthält) mit der Normalen parallel zu $-\vec{e_i}$.

Zusammenhang mit der Spannung: Kraft = Spannung mal Fläche (senkrecht zur Angriffsrichtung der Kraft)

$$\vec{F_1} = \vec{\sigma_1}\delta x_2 \delta x_3$$
$$\vec{F_2} = \vec{\sigma_2}\delta x_3 \delta x_1$$
$$\vec{F_3} = \vec{\sigma_3}\delta x_1 \delta x_2$$

mit den Spannungen $\vec{\sigma_i}$; als Matrixelemente geschrieben:

$$F_{1i} = \sigma_{1i}\delta x_2 \delta x_3$$
$$F_{2i} = \sigma_{2i}\delta x_3 \delta x_1$$
$$F_{3i} = \sigma_{3i}\delta x_1 \delta x_2$$

(σ_{ij}) ist eine 3×3-Matrix

Euler-Lagrangescher (Piola) Spannungstensor σ_{ij}:
i: bezieht sich auf Orientierung der Flächennormalen (d.h. Angriffsrichtung der Kräfte)
j: Komponente der jeweiligen Kraft
analog für $\vec{F_i'}, i = 1, 2, 3$

Dadurch ergibt sich für die Kraft:

- Diagonalelemente σ_{ii}: Die Richtung der Kraft ist gleich der Flächennormalen der Fläche, an der die Kraft angreift, es handelt sich also um eine Zug- oder Druckkraft.
- Nichtdiagonalelemente $\sigma_{ij,i\neq j}$: Die Richtung der Kraft ist nicht gleich der Flächennormalen, die Kraft greift also „seitlich“ an, es handelt sich um Tangentialkraft bzw. Scherkraft.

b) Mechanisches Gleichgewicht des infinitesimal kleinen Quaders

Es gibt zwei Arten von Kräften:

- Kräfte, die an den Oberflächen angreifen, beschrieben z.B. durch den Spannungstensor $\bar{\sigma}$
- Kräfte, die auf Volumina bezogen sind, z.B. Gravitationskraft pro Volumen $g\varrho$ (Dichte ϱ), oder die Newtonsche Beschleunigung pro Volumen $\varrho\vec{b}$ (Beschleunigung $\vec{b}$)

Falls das mechanische Gleichgewicht an infinitesimal kleinen Volumina betrachtet wird, können Volumenkräfte vernachlässigt werden.

In unserem Fall:

- flächenbezogene Kräfte: proportional zu $\delta x_1 \delta x_2$ bzw. $\delta x_1 \delta x_3$ bzw. $\delta x_2 \delta x_3$
- volumenbezogene Kräfte: proportional zu $\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$

Mechanisches Gleichgewicht: Damit keine beschleunigte Bewegung auftritt, muss die Summe aller Kräfte Null sein.

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_1'} + \vec{F_2'} + \vec{F_3'} \stackrel{!}{=} 0$$

$$(\sigma_{1i} + \sigma'_{1i})\delta x_2 \delta x_3 + (\sigma_{2i} + \sigma'_{2i})\delta x_3 \delta x_1 + (\sigma_{3i} + \sigma'_{3i})\delta x_1 \delta x_2 = 0 \quad \forall i = 1,2,3$$

Da $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$ beliebig (sie können also auch Null sein):

$$\sigma_{ji} + \sigma'_{ji} = 0 \quad \forall i,j \in \{1,2,3\}$$

$$\sigma'_{ji} = -\sigma_{ji}$$

$$\vec{F_i'} = -\vec{F_i} \quad \forall i = 1,2,3$$

Die Summe der Drehmomente muss Null sein; Bezugspunkt = Nullpunkt, außerhalb von G_0 (d.h. der infinitesimale Quader liegt bei (x,y,z)). Kein Beitrag von $\vec{F_1'}, \vec{F_2'}, \vec{F_3'}$, d.h. auf die Flächen, die den Nullpunkt gemeinsam haben.

$$\begin{aligned}
\text{Summe der Drehmomente} &= \vec{F_1} \times \delta x_1 \vec{e_1} + \vec{F_2} \times \delta x_2 \vec{e_2} + \vec{F_3} \times \delta x_3 \vec{e_3} \\
&= \vec{\sigma_1} \delta x_2 \delta x_3 \times \delta x_1 \vec{e_1} + \vec{\sigma_2} \delta x_3 \delta x_1 \times \delta x_2 \vec{e_2} + \vec{\sigma_3} \delta x_1 \delta x_2 \times \delta x_3 \vec{e_3} \\
&= \left(\vec{\sigma_1} \times \vec{e_1} + \vec{\sigma_2} \times \vec{e_2} + \vec{\sigma_3} \times \vec{e_3}\right) \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

da $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$ beliebig:

$$\vec{\sigma_i} \times \vec{e_i} = 0$$

$$\vec{\sigma_i} = \sigma_{ij} \vec{e_j}$$

$$\sigma_{ij} \vec{e_i} \times \vec{e_j} = 0$$

Alle Elemente mit $i \neq j$:

$$(\sigma_{12} - \sigma_{21})\,\vec{e_3} + (\sigma_{23} - \sigma_{32})\,\vec{e_1} + (\sigma_{13} - \sigma_{31})\,\vec{e_2} = 0$$

symmetrischer Tensor: $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$
Drehmoment = Angriffspunkt × Kraft (Kraft = Spannung mal Fläche; die Spannung wirkt genauso wie der Druck gleichmäßig in alle Richtungen, die Wahl der Fläche bestimmt die Richtung der Kraft)

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ x + \delta x_1 & y + (\delta x_2)/2 & z + (\delta x_3)/2 \\ \sigma_{11}\delta x_2 \delta x_3 & \sigma_{12}\delta x_2 \delta x_3 & \sigma_{13}\delta x_2 \delta x_3 \end{vmatrix}}_{\text{Moment von } \delta \vec{F_1}} + \underbrace{\begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ x & y + (\delta x_2)/2 & z + (\delta x_3)/2 \\ -\sigma_{11}\delta x_2 \delta x_3 & -\sigma_{12}\delta x_2 \delta x_3 & -\sigma_{13}\delta x_2 \delta x_3 \end{vmatrix}}_{\text{Moment von } \delta \vec{F_1'}}$$

Hier wirkt die Kraft auf die Mitte der Fläche in $\vec{e_1}$-Richtung, darum wird jeweils $(\delta x_2)/2$ bzw. $(\delta x_3)/2$ zu den Koordinaten der Ecken dazuaddiert.

$$|\delta \vec{F_1}| + |\delta \vec{F_2}| + |\delta \vec{F_3}| = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3}_{\text{Drehmoment von } \delta F_1} + \begin{pmatrix} \sigma_{23} \\ 0 \\ -\sigma_{21} \end{pmatrix} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 + \begin{pmatrix} -\sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ 0 \end{pmatrix} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 = \begin{pmatrix} \sigma_{23} - \sigma_{32} \\ -\sigma_{13} + \sigma_{31} \\ \sigma_{12} - \sigma_{21} \end{pmatrix} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 = 0$$

Damit das Drehmoment auf G_0 verschwindet, muss $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \forall i \neq j \in \{1, 2, 3\}$
Die 3×3-Matrix σ_{ij} ist symmetrisch. Falls σ_{ij} nicht symmetrisch ist, wirkt auf den elastischen Körper K das Drehmoment

$$M_i = \varepsilon_{ijk} \int_K \sigma_{jk}(\vec{r}) d^3 r$$

c) Kraft auf eine beliebig orientierte Fläche des elastischen Körpers

Es sei $d\vec{f}$ eine beliebige kleine Fläche mit der Normalen $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$: $d\vec{f} = \vec{n}|d\vec{f}|$. Die Projektion auf die Fläche mit der Normalen $\vec{e_i}$ sei $df_i = n_i df$. Die Flächen ($df = |d\vec{f}|, df_1, df_2, df_3$) (d.h. die gewählte Fläche df zusammen mit ihren Projektionen auf die Ebenen zwischen den Koordinatenachsen) bilden einen infinitesimal kleinen Tetraeder. Es gilt die Gleichgewichtsbedingung der Statik ($\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$):

$$\vec{F_1'} + \vec{F_2'} + \vec{F_3'} + \vec{F} = 0$$

Die Kräfte $\vec{F_i'}$ stehen auf Oberflächen, deren Normalen antiparallel zu $\vec{e_i}$ sind.

$$-\vec{\sigma_1} df_1 - \vec{\sigma_2} df_2 - \vec{\sigma_3} df_3 + \vec{\sigma} df = 0$$

$$df_1 = n_1 df$$

$$\vec{\sigma} = n_i \vec{\sigma_i}$$

D.h.:

$$\vec{\sigma} df = \vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \vec{\sigma_1} df_1 + \vec{\sigma_2} df_2 + \vec{\sigma_3} df_3$$

Division durch df:

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma_1} n_1 + \vec{\sigma_2} n_2 + \vec{\sigma_3} n_3$$

$$\sigma_{ij} = n_i \sigma_{ij} \quad \forall j = 1, 2, 3$$

$$\boxed{\sigma_j = n_1 \sigma_{1j} + n_2 \sigma_{2j} + n_3 \sigma_{3j}}$$

n_i: Komponenten des Einheitsvektors $\vec{n}$

d) Gleichgewichtsbedingungen für beliebige makroskopische elastische Körper

G sei ein beliebiger makroskopischer elastischer Körper, ∂G seine Oberfläche, df ein Flächenelement dieser Oberfläche

1.) Volumenproportionale Kräfte

Kräfte $\varrho_0 \vec{g}$ (ϱ_0: Massendichte)

$$\vec{g} = \begin{cases} \vec{g} & \text{Erdbeschleunigung} \\ -\dot{\vec{v}} & \text{Beschleunigung} \end{cases}$$

Gleichgewichtsbedingung aus der Statik (Gleichgewicht zwischen inneren und äußeren Kräften):

$$\int_G \varrho_0 \vec{g} d^3 r + \int_{\partial G} \vec{\sigma} df = 0$$

$$\int_{\partial G} \vec{\sigma} df = \int_{\partial G} n_i \vec{\sigma_i} df = \int_{\partial G} \vec{\sigma_i} df_i$$

Gaußscher Satz ($\vec{A}$: beliebiges Vektorfeld):

$$\int_{\partial G} \vec{A} \cdot d\vec{f} = \int_{\partial G} A_i df_i \overset{\text{Gauß}}{=} \int \mathrm{div} \vec{A} d^2 v = \int_G \frac{\partial A_i}{\partial x_i} d^2 r$$

$$A_i = \sigma_{ij} \quad \forall i = 1,2,3$$

Anwendung des Gaußschen Satzes auf obige Gleichgewichtsbedingung:

$$\int_G \varrho_0 g_j d^3 r + \int_G \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} d^3 r = 0 \quad \forall j = 1,2,3$$

G ist beliebig; da die Integrale laut der Gleichgewichtsbedingung gleich sind, müssen es auch die Integranden sein:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = -\varrho_0 g_j = \begin{cases} -\varrho_0 g \\ +\varrho_0 \dot{v}_j \end{cases}$$

Gleichgewichtsbedingung der Elektromechanik

§ 4 Energetische Konzepte

a) Einfaches Beispiel

Ein Quader wird durch Normalkraft in Richtung x_1 gezogen, dabei wird er auf der anderen Seite (bei $x_1 = 0$) festgehalten.

$$\sigma_{11} = \frac{|\vec{F}|}{Q}$$

Q: Querschnitt des Quaders

Die Kraft ruft eine Verschiebung in der Oberfläche O hervor, deren Wert durch das Hookesche Gesetz bestimmt ist:

$$\varepsilon_{11} = \frac{u}{L}$$

L: Länge des Quaders in x_1-Richtung

Fragestellung: Welche Arbeit δA wird geleistet, wenn die Auslenkung um $\delta u_1 = L \cdot \delta\varepsilon_{11}$ vergrößert wird?

$$\delta A = |\vec{F}|\delta u_1 = \underbrace{Q\sigma_{11}}_{|\vec{F}|}\underbrace{L\delta\varepsilon_{11}}_{u} \quad \text{„Kraft} \times \text{Weg“}$$

$V = Q \cdot L$: Volumen des Quaders

$$\frac{\delta A}{V} = \sigma_{11}\delta\varepsilon_{11}$$

bilinear in σ_{11} und ε_{11}

b) Prinzip der virtuellen Verschiebung

D'Alembertsches Prinzip

Bei einer virtuellen Verschiebung leisten Zwangskräfte keine Arbeit. Beispiel: Klotz auf einer Ebene (reibungsfrei gelagert), Gravitation als Zwangskraft (fesselt den Klotz auf die Oberfläche), bei Bewegung auf der Oberfläche wird keine Arbeit geleistet.

Virtuelle Verschiebungen sind charakterisiert durch:

1. Die Lageänderung des mechanischen Systems muss mit den Zwangsbedingungen verträglich sein.
2. Nur gedachte Lageänderung (d.h. virtuell).
3. Die Lageänderung ist hinreichend klein, aber nicht infinitesimal: $\delta\vec{r}$.

D'Alembertsches Prinzip (Hinzunahme der Trägheitskräfte), z.B. für ein System von Massenpunkten:

$$\sum_{k=1}^{3} \left(\vec{F_k} - m_k \frac{d^2\vec{r_k}}{dt^2} \right) \cdot \delta\vec{r_k} = 0 \quad \text{Summe der Arbeit („Kraft} \times \text{Weg“) ist 0}$$

m_k: Masse des k-ten Massenpunkts
$\vec{F_k}$: die auf den k-ten Massenpunkt wirkende Kraft, enthält u.a. die Zwangskraft

c) Prinzip der virtuellen Arbeit und das d'Alembertsche Prinzip in der Elastomechanik

virtuelle Arbeit, Extremalprinzip und elastische Energiedichte

In einem elastischen Körper treten äußere Kräfte nur auf seiner Oberfläche ∂G auf. Auf das Oberflächenelement $d\vec{f}$ wirkt die Kraft

$$\delta F_j = df_j \omega_{ij} \quad \forall j = 1,2,3$$

Matrix (ω_{ij}): Oberflächenspannung

Anmerkung: Der Begriff „Oberflächenspannung“ meint die Spannung, die an der Oberfläche ∂G auftritt, wenn auf den Körper eine Kraft ausgeübt wird. Das hat nichts mit der Oberflächenspannung bei einer Flüssigkeit zu tun, die aus der intermolekularen Anziehungskraft resultiert (und auch ohne äußere Krafteinwirkung existiert).

Damit ein Gleichgewicht vorhanden ist:

$$\sigma_{ij} \approx \omega_{ij} \quad \forall i,j \in \{1,2,3\}, \vec{r} \in \partial G$$

Anmerkung: Es ist mathematisch sehr schwierig, die Oberflächenspannung ω exakt zu berechnen. Darum beschreibt man sie angenähert durch die Spannung σ.

volumenproportionale Kräfte:

$$\delta F = \varrho \vec{g} d^3 r$$

ϱ: Massendichte

$$\vec{g} = \begin{cases} \vec{g} & \text{Erdbeschleunigung} \\ -\dot{\vec{v}} & \text{Beschleunigung} \end{cases}$$

keine Zwangskräfte!

$$\delta A := \int_{\partial G} (df_i \sigma_{ij}) \cdot \delta u_j(\vec{r}) + \int_G \varrho \vec{g} \cdot \delta \vec{u}(\vec{r}) d^3 r$$

$\delta\vec{u}$: virtuelle Verschiebung, muss obige Punkte erfüllen

Hilfsformel: Betrachte den fiktiven Vektor $\vec{a}$

$$a_i = \sigma_{ij} \delta u_j$$

$$\int_{\partial G} df_i \vec{a_i} = \int_{\partial G} \vec{a} d\vec{f} \overset{\text{Gauß}}{=} \int_G \frac{\partial a_i}{\partial x_i} d^3 r$$

$$\int_{\partial G} (df_i \sigma_{ij})\, du_j = \int_G \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{[\sigma_{ij} \delta u_j]}_{\vec{a_i}} d^3 r \overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_G \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} d^3 r + \int_G \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x} \delta u_j d^3 r$$

Arbeitshypothese aus der Mechanik: Die Operationen ∂ und δ können vertauscht werden.

$$\int_G \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} d^3 r = \int_G \sigma_{ij} \delta \frac{\partial u_j}{\partial x_i} d^3 r = \frac{1}{2} \int_G \left(\sigma_{ij} \delta \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sigma_{ji} \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) d^3 r$$

$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$:

$$\int_G \sigma_{ij} \delta \frac{\partial u_j}{\partial x_i} d^3 r = \frac{1}{2} \int \sigma_{ij} \delta \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] d^3 r$$

Da $\vec{u}$ klein ist:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \varepsilon_{ij}$$

$$\delta A = \int_G \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d^3 r + \int_G \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \varrho g_j \right] \delta u_j(\vec{r})$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_3} \quad \forall j = 1,2,3$$

Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \varrho g_j = 0 \quad \forall j = 1,2,3$$

$$\boxed{\delta A = \int_G \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d^3 r}$$

siehe Arbeit gegen Druck $\delta A = -pdV$
Da keine Zwangskräfte vorhanden sind, ist $\delta A = 0$.

Es ist sinnvoll, eine auf das Volumenelement bezogene virtuelle Arbeit δa zu definieren („Kraft $\times$ Weg“):

$$\delta a = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}(\vec{r})$$

d) Verallgemeinerungen

Prinzip der virtuellen Verschiebung bei großen Deformationen

Verallgemeinertes Hooksches Gesetz: Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen Verzerrungen ε_{ij} und Spannungen σ_{ij}

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \forall i,j \in \{1,2,3\}$$

(C_{ijkl} ist eine $3 \times 3 \times 3 \times 3$-Matrix; Einsteinsche Summenkonvention über k und l!)

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$$
$$C_{jikl} = C_{ijkl}$$
$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$$
$$C_{ijlk} = C_{ijkl}$$

Anmerkung: C_{ijkl} hat 81 Elemente; wenn man nach der *Notation von Voigt* jeweils zwei Elemente zusammenfasst (z.B. das Element (11) zu 1, (22) zu 2, (23) = (32) (Symmetrie!) zu 4), kommt man auf sechs zusammengefasste Elemente (von den neun Kombinationen sind nur sechs verschieden, man hat also die Symmetrie innerhalb von ij bzw. kl berücksichtigt). C_{ijkl} hat vier Indizes, d.h. man kann es sich als Matrix mit 6×6-Matrix, bestehend aus den jeweils sechs zusammengefassten Elementen, vorstellen. Weil zwischen ij und kl ebenfalls Symmetrie auftritt, sind von diesen 36 Elementen nur 21 verschieden (6 Diagonalelemente und 30/2 Nichtdiagonalelemente).

Aus der Existenz des thermodynamischen Potenzials: freie Energie Φ (2. Hauptsatz der Thermodynamik)

$$C_{\boxed{ij}\,\boxed{kl}} = C_{\boxed{kl}\,\boxed{ij}}$$

C_{ijkl}: elastische Konstante (vgl. Federhärte)

$$\begin{aligned} \delta a &= \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} \\ &= \delta \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ &= \frac{1}{2} \left[\delta \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \delta \varepsilon_{kl} C_{klij} \varepsilon_{ij} \right] \\ &\overset{\text{2. Hauptsatz}}{=} C_{ijkl} \frac{1}{2} \underbrace{\left[\delta \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \delta \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} \right]}_{\text{Kettenregel: } \delta(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl})} \end{aligned}$$

$$\delta a = \delta \left[\frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \right] = \frac{1}{2} \delta \left[\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right]$$

Elastische Energiedichte:

$$u := \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

$\delta a = \delta u$:

$$\delta A = \int_G \delta u d\vec{r} = \delta \int_G u d^3 r$$

$\int_G u d^3 r$ ist die im Volumen G gespeicherte elastische Energie.

Da keine Zwangskräfte vorhanden $\Rightarrow$ hinreichende und notwendige Bedingung für das Gleichgewicht in einem elastischen Medium ist, dass die in ihm gespeicherte elastische Energie extremal wird. Eine genauere Betrachtung (Thermodynamik) ergibt ein Minimum.

Verallgemeinerung für große Deformationen; Arbeitshypothese:

1. Das Extremalprinzip für die elastische Energie gilt für einen beliebigen elastischen Körper bei beliebig großer Deformation.
2. $\sigma_{ij} = (\partial u)/(\partial \varepsilon_{ij}) \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$ gilt auch bei großer Deformation.

Nebenrechnung zum zweiten Punkt:

$$u = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} C_{klij} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} C_{klij} \varepsilon_{kl}$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \sigma_{ij}}$$

$$\delta u := u(\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij}) - u(\varepsilon_{ij}) = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta\varepsilon_{ij} + O(\delta\varepsilon^2) = \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij}$$

Diese Arbeitshypothese ist formal sinnvoll, da:

- sie ist universell, d.h. enthält keine Materialkonstante
- sie ist ein Skalar
- sie hat die Dimension einer Energiedichte

e) Verknüpfung mit Thermodynamik

Arbeitshypothese: Auch bei beliebig großer Deformation ist die Arbeit pro Volumeneinheit bei elastischer Verformung gleich $\delta a = \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij}$.

Begründung:

- Realisation der Aussage „Arbeit (δa) = Kraft (σ_{ij}) $\times$ Weg ($\delta\varepsilon_{ij}$)“
- universell, enthält keine Materialkonstante
- Die Verknüpfung von (σ_{ij}) mit (ε_{ij}) ergibt einen Skalar.

Beachte die Analogie zu anderen Arbeitsausdrücken, z.B. $\delta A = -pdV$ oder $\delta A = H_i \cdot dM_i$

1.) 1. und 2. Hauptsatz der Thermodynamik

Thermodynamisches Potenzial: innere Energie (pro Volumeneinheit) mit den unabhängigen Variablen s und (ε_{ij})

$$du = Tds + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_s$$

isentropische Zustandsänderung (d.h. $\delta Q = 0$ und reversibel):

$$u(s, (\varepsilon_{ij})) - u(s, 0) = \int_c \sigma_{ij}((\varepsilon_{lk})) d\varepsilon_{ij}$$

Thermodynamisches Potenzial: freie Energie (pro Volumeneinheit) mit den unabhängigen Variablen T und (ε_{ij})

$$d\phi = -sdT + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_T$$

Isotherme Zustandsänderung:

$$\Phi(T, (\varepsilon_{ij})) - \Phi(T, 0) = \int_c \sigma_{ij}(T, (\varepsilon_{ij})) d\varepsilon_{ij}$$

Beispiel: lineare Approximation

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(T)\varepsilon_{kl}$$

$$\sigma_{kl} = C_{klij}(T)\varepsilon_{ij}$$

d.h. Symmetrie in (ij) und (kl)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = C_{ijkl} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}}$$

$$\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{klij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}$$

Daraus folgt:

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

Folge aus dem 1. und 2. Hauptsatz; der Übergang vom verformten in den unverformten Zustand entspricht einer Entmagnetisierung.

§ 5 Erinnerung an Vektorrechnung

a) Einführung in die Tensorrechnung

Orthogonale Transformation der Koordinaten im $\mathbb{R}^3$: ein Automorphismus; Koordinatensystem Γ mit den Achsen x_1, x_2, x_3; Γ': ein weiteres Koordinatensystem; Transformation $\Gamma \to \Gamma'$ (linear, eindeutig, umkehrbar):

$$x'_i = \alpha_{ij} x_j \quad \forall i = 1, 2, 3$$

(α_{ij}) ist eine reelle 3×3-Matrix

Forderung nach einer längentreuen Abbildung:

$$x'_i x'_j = \alpha_{ij} \alpha_{il} x_j x_l = x_j x_j$$

Da x_i beliebig:

$$\alpha_{ij} \alpha_{il} = \delta_{jl}$$

$$\bar{\alpha}^+ \cdot \bar{\alpha} = \bar{1}$$

$$\boxed{\alpha^+_{ji} \alpha_{il} = \delta_{jl}}$$

Für die Inverse einer Matrix gilt:

$$\alpha^{-1}_{ji} \alpha_{il} = \delta_{il}$$

Das bedeutet, die Abbildung ist umkehrbar:

$$\alpha^{-1}_{ji} = \alpha^+_{ji}$$

Für die Transformation gilt also:
$\Gamma \to \Gamma'$:

$$x'_i = \alpha_{ij} x_j$$

$\Gamma' \to \Gamma$:

$$x_i = x'_j \alpha_{ji}$$

$$\boxed{\alpha_{ji} \alpha_{il} = \delta_{jl}}$$

$$\det(\alpha^+_{ji} \alpha_{il}) = \det(\delta_{il}) = 1$$

$$\det(\alpha^+_{ji}) \det(\alpha_{il}) = 1$$

$$\det(\alpha_{il}) = \pm 1 = \begin{cases} +1 & \Gamma \to \Gamma' \text{ ist eine reine Drehung} \\ -1 & \Gamma \to \Gamma' \text{ ist eine Spiegelung oder Inversion} \end{cases}$$

Kenngrößen der Transformation: 9 Elemente α_{ij}, aber 6 Bedingungen, d.h. 3 Größen sind frei wählbar. Zum Beispiel: Wahl der Achsen x'_1, x'_2, x'_3, dann ergibt sich ein Rechtssystem bei $(\det\bar{\alpha}) = +1$ und ein Linkssystem bei $(\det\bar{\alpha}) = -1$.

Basisvektoren in Γ:

$$\vec{e_1} = (1, 0, 0), \vec{e_2} = (0, 1, 0), \vec{e_3} = (0, 0, 1)$$

Bilder der Basisvektoren in Γ':

$$\vec{e'_1} = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}), \vec{e'_2} = (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}), \vec{e'_3} = (\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33})$$

$$\boxed{\vec{e'_i} = \alpha_{ij} \vec{e_j}}$$

$$\vec{e'_1} \cdot \vec{e'_2} = \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{32} = \delta_{12} = 0$$

b) Erinnerung an die Vektorrechnung

Eigenschaften des Vektors $\vec{A}$:

- Betrag $|\vec{A}|$, Einheitsvektor $(\cos x_1, \cos x_2, \cos x_3)$, es gilt:

$$\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \cos^2 x_3 = 1$$

- (A_1, A_2, A_3); $A_i = |\vec{A}| \cos \alpha_i \quad \forall i = 1, 2, 3$

$$\boxed{\vec{A} = A_1\vec{e_1} + A_2\vec{e_2} + A_3\vec{e_3}}$$

In der Physik besteht ein Vektor aus den Komponenten zusammen mit einer Basis. In der Mathematik werden bereits mehrere zusammengehörige Zahlen als Vektor bezeichnet.

Im Koordinatensystem Γ':

$$\vec{A} = A_1'\vec{e_2'} + A_2'\vec{e_2'} + A_3'\vec{e_3'} = A_i'\alpha_{ij}\vec{e_j} = A_j\vec{e_j}$$

$$A_i'\alpha_{ij} = A_j$$

$$\boxed{A_k' = \alpha_{kj}A_j}$$

1.) Forminvarianz des inneren Produkts

$\vec{A}$ und $\vec{B}$ seien beliebige Vektoren:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i\vec{e_i} \cdot B_j\vec{e_j} = A_iB_i = A_i'\vec{e_i'} \cdot B_j'\vec{e_j'} = A_i'B_i'$$

Die orthogonale Transformation lässt also den Wert des inneren Produkts invariant.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos \alpha(\vec{A}, \vec{B})$$

2.) Forminvarianz des äußeren Produkts

Levi-Civita-Symbol:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{wenn } ijk = 123 \text{ oder eine zyklische Vertauschung davon} \\ -1 & \text{wenn } ijk = 213 \text{ oder eine zyklische Vertauschung davon} \\ 0 & \text{wenn mind. zwei Komponenten von } ijk \text{ gleich sind} \end{cases}$$

Äußeres Produkt $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$:

$$\boxed{C_i = \varepsilon_{ijk}A_jB_k}$$

z.B. $C_1 = A_2B_3 - A_3B_2$

Γ' ist auch ein Rechtssystem, d.h. $\vec{C'} = \vec{A'} \times \vec{B'}$ (bzw. entprechend komponentenweise ausgedrückt).
Zusammenhang zwischen ε_{ijk} und ε'_{ijk}:

$$C_i' = \alpha_{ij}C_j = \alpha_{ij}\varepsilon_{jkl}A_kB_l = \alpha_{ij}\varepsilon_{jkl}\alpha_{mk}A_m'\alpha_{nl}B_n' = \varepsilon'_{imn}A_m'B_n'$$

$$\boxed{\varepsilon'_{imn} = \alpha_{ij}\alpha_{mk}\alpha_{nl}\varepsilon_{jkl}}$$

total antisymmetrischer Tensor 3. Stufe (d.h. eine „dreidimensionale Matrix“)

$$\vec{e_i} \times \vec{e_j} = \varepsilon_{ijk}\vec{e_k}$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = A_i\vec{e_i} \times B_j\vec{e_j} = A_iB_j\vec{e_i} \times \vec{e_j} = A_iB_j\varepsilon_{ijk}\vec{e_k}$$

Ergänzung zum Punkt b [...]:
Die Basisvektoren in Γ ($\vec{e_1} = (1,0,0)$, $\vec{e_2} = (0,1,0)$, $\vec{e_3} = (0,0,1)$) besitzen im Γ'-System die Komponenten:

$$\vec{e_1} = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}), \quad \vec{e_2} = (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}), \quad \vec{e_3} = (\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33})$$

Folgerungen:

- $\alpha_{lj} = \vec{e_l'} \cdot \vec{e_j}$
  Kosinus des Winkels, den $\vec{e_l'}$ und $\vec{e_j}$ miteinander einschließen
- $\vec{e_j} \cdot \vec{e_l} = \alpha_{ij}\alpha_{kl}\underbrace{\vec{e_i'} \cdot \vec{e_k'}}_{\delta_{il}} = \alpha_{ij}\alpha_{il} = \delta_{jk}$

  $\alpha_{kj}\vec{e_j} = \alpha_{ij}\alpha_{kj}\vec{e_i'} = \vec{e_k}$

$$\boxed{\vec{e_k} = \alpha_{kj}\vec{e_j}} \quad \forall k = 1,2,3$$

c) Einführung in die Tensorrechnung

1.) Definition eines Tensors 2. Stufe

Sei $\vec{A}$ ein beliebiger Vektor und $\bar{T} = (T_{ij})$ eine reellwertige 3×3-Matrix. Betrachte die lineare Verknüpfung:

$$B_i := T_{ij}A_j \quad \forall i = 1,2,3$$

Welche Forderungen müssen die T_{ij} erfüllen, damit (B_1, B_2, B_3) die Komponenten eines Vektors sind? Auch in Γ' muss die analoge Beziehung gelten, d.h. $B_i' = T_{ij}'A_i'$, wobei $B_i' = \alpha_{ik}B_k$ und $A_j' = \alpha_{jl}A_l$.

$$\alpha_{ik}B_k = T_{ij}'\alpha_{jl}A_l$$

$$\alpha_{ik}T_{kl}A_l = T_{ij}'\alpha_{jl}A_l \quad \forall i = 1,2,3$$

Da (A_1, A_2, A_3) beliebig:

$$\alpha_{ik}T_{kl} = T_{ij}'\alpha_{jl} \quad \forall i,l \in \{1,2,3\}$$

$$\boxed{T_{im}' = \alpha_{ik}T_{kl}\alpha_{ml}} \text{ Tensor 2. Stufe}$$

$$\bar{T}' = \bar{\alpha} \cdot \bar{T} \cdot \bar{\alpha}^{+}$$

(T_{ij}) und (T_{ij}') sind die Komponenten eines Tensors im Γ- bzw. Γ'-System.

2.) Spezielle Tensoren

Einheitstensor:

$$\bar{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\bar{E})_{ij} = \delta_{ij}$$

Im Γ'-System:

$$(\bar{E})'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jm}\delta_{km} = \alpha_{ik}\alpha_{jk} = \delta_{ij}$$

$$(\bar{E})' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Symmetrischer Tensor:

$$T_{ij} = T_{ji} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$$

$$T'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}T_{kl} = \alpha_{ik}\alpha_{jl} = T'_{ji}$$

Im $\mathbb{R}^3$ hat der symmetrische Tensor 6 wesentliche Elemente.

Antisymmetrischer Tensor 2. Stufe:

$$T_{ij} = -T_{ji} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$$

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} \\ -T_{21} & 0 & T_{23} \\ -T_{13} & -T_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Im $\mathbb{R}^3$ hat der antisymmetrische Tensor 3 wesentliche Elemente:

$$T_{ij} = \varepsilon_{ijk}S_k \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$$

Transformationsverhalten:

$$T'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}T_{kl} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}\varepsilon_{klm}S_m$$

$$S_m = \alpha_{nm}S'_n = \alpha_{ik}\alpha_{jl}\varepsilon_{klm}S'_n$$

Beispiel:

$$\vec{S} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$S_k = \varepsilon_{klm}A_mB_n$$

$$T_{ij} = \varepsilon_{ijk}S_k = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}A_mB_n$$

Hilfsformel (ohne Beweis):

$$\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

$$T_{ij} = A_iB_j - A_jB_i$$

3.) Mit Tensoren 2. Stufe gebildete forminvariante skalare Größen

$$\vec{B} = \bar{T} \cdot \vec{A}$$

skalare Multiplikation mit dem Vektor $\vec{C}$ ergibt:

$$\vec{C} \cdot \vec{B} = \vec{C} \cdot \bar{T} \cdot \vec{A} = C_jT_{ij}A_j$$

In Γ und Γ' gibt es das identische Resultat:

$$\vec{C} \cdot \vec{B} = C'_iT'_{ij}A'_j = \alpha_{im}\alpha_{ik}\alpha_{jl}C_mT_{nl}A_k$$

$\vec{C} \cdot T \cdot \vec{A}$ ist skalar

$\bar{S}$ und $\bar{T}$ sind beliebige Tensoren:

$$S'_{ij}T'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jm}\alpha_{il}\alpha_{jn}S_{km}T_{ln} = S_{km}T_{km}$$

forminvariant, skalar!

4.) Dyadisches (direktes) Produkt zweier Vektoren

inneres Produkt: $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ist ein Skalar
äußeres Produkt: $\vec{A} \times \vec{B}$ ist ein Vektor

Dyadisches Produkt:
in Γ':

$$U_{ij} = A_i B_j \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$$

in Γ?

$$U_{ij} = \alpha_{ki}\alpha_{lj}A'_k B'_l = \alpha_{ki}\alpha_{lj}U'_{kl}$$

Transformationsverhalten eines Tensors 2. Stufe

Notation:

$$\boxed{\bar{U} = \vec{A} \otimes \vec{B}}$$

In Komponentendarstellung bei den Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$:

$$\bar{U} = (A_i \vec{e_i}) \otimes (B_j \vec{e_j}) = A_i B_j \vec{e_i} \otimes \vec{e_j}$$

$$\boxed{\bar{U} = U_{ij} \vec{e_i} \otimes \vec{e_j}}$$

Komponentendarstellung eines Tensors 2. Stufe

5.) Hauptachsentransformation eines Tensors 2. Stufe

Mit der 3×3-Matrix T_{ij} betrachte man das Eigenwertproblem:

$$T_{ij} x_j = \tau x_i \quad i = \{1, 2, 3\}$$

lineare, homogene Gleichung; nicht verschwindende Lösungen treten nur auf, wenn:

$$\det \begin{vmatrix} T_{11} - \tau & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \tau & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \tau \end{vmatrix} = 0$$

$$\tau^3 - \tau^2 T_I + \tau T_{II} - T_{III} = 0$$

$$T_I = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

$$T_{II} = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{21} & T_{22} \\ T_{31} & T_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_1 & T_{32} \\ T_{11} & T_{12} \end{vmatrix}$$

$$T_{III} = \det|\bar{T}|$$

Behauptung: T_I, T_{II}, T_{III} sind invariant gegen beliebige orthogonale Transformationen.

Beweis: Setze $x_j = \alpha_{jk} z_k \quad \forall j = 1, 2, 3$

$$T_{ij}\alpha_{jk} z_k = \tau \alpha_{il} z_l$$

$$\alpha_{in} T_{ij} \alpha_{jk} z_k = \tau z_n$$

$$T'_{nk} z_k = \tau z_n$$

Nicht verschwindende Lösungen:

$$\det \begin{vmatrix} T'_{11} - \tau & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} - \tau & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} - \tau \end{vmatrix} = 0$$

Damit Eigenwertspektrum identisch:

$$(\bar{T}')_I = (\bar{T})_I, (\bar{T}')_{II} = (\bar{T})_{II}, (\bar{T}')_{III} = (\bar{T})_{III}$$

T_I, T_{II}, T_{III} sind Invarianten des Tensors $\bar{T}$.

Falls $\bar{T}$ symmetrisch ist, gilt:

1. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms
$$\tau^3 - T_I \tau^2 + T_{II}\tau + T_{III} = 0$$
sind reell: $z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)}$
2. Zu jedem Eigenwert $\tau^{(k)}$ gibt es einen Eigenvektor $\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}\right)$, so dass gilt:
$$T_{ij} x_j^{(k)} = \tau^{(k)} x_i^{(k)} \quad \forall i = 1, 2, 3$$
3. Die Eigenvektoren sind orthonormiert:
$$\vec{x_i}^{(k)} \cdot \vec{x_i}^{(l)} = \delta^{kl}$$

Matrix:

$$\bar{\alpha} = (\alpha_{ik}) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} \\ x_3^{(1)} & x_3^{(2)} & x_3^{(3)} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{ik} = x_i^{(k)}$$

$$\alpha_{ik}\alpha_{il} = \delta_{kl}$$

In die Eigenwertgleichung eingesetzt:

$$T_{ij}\alpha_{jk} = \tau^{(k)}\alpha_{il}$$

mit α_{il} multipliziert:

$$\alpha_{il} T_{ij} \alpha_{jk} = \tau^{(k)} \delta_{jk}$$

$$T'_{lk} = \tau^{(k)} \delta_{lk}$$

$$(\bar{T})' = \begin{pmatrix} \tau^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \tau^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & \tau^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$T_I = \tau^{(1)} + \tau^{(2)} + \tau^{(3)}$$

$$T_{II} = \tau^{(1)}\tau^{(2)} + \tau^{(2)}\tau^{(3)} + \tau^{(3)}\tau^{(1)}$$

$$T_{III} = \tau^{(1)}\tau^{(2)}\tau^{(3)}$$

Tensoren höherer Stufe:

- Levi-Civita-Symbol: total antisymmetrischer Tensor 3. Stufe
$$\varepsilon'_{ijk} = \alpha_{il}\alpha_{im}\alpha_{kn}\varepsilon_{lmn}$$
- $3 \times 3 \times 3 \times 3$-Matrix C_{ijkl}
$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$
$$\sigma'_{ij} = C'_{ijkl}\varepsilon'_{kl}$$
$$C'_{ijkl} = \alpha_{im}\alpha_{jn}\alpha_{kv}\alpha_{ls}C_{mnvs}$$

d) Tensoren in der Elastizitätstheorie

1.) Jacobi-Matrix

$$J_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

mit dem Verschiebungsfeld $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$

Übergang $\Gamma \to \Gamma'$:

$$x'_i = \alpha_{ij} x_j$$
$$u'_i = \alpha_{ik} u_k$$

$$\begin{aligned} J'_{ij} &= \delta_{ij} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \\ &= \delta_{ij} + \alpha_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} \\ &= \delta_{ij} + \alpha_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \alpha_{jl} \\ &= \alpha_{ik} \left[\delta_{kl} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right] \alpha_{jl} \\ &= \alpha_{ik} J_{kl} \alpha_{jl} \end{aligned}$$

da $\alpha_{ik}\delta_{kl}\alpha_{jl} = \underbrace{\alpha_{ik}\alpha_{jk}}_{\delta_{ij}}$

Das Ergebnis ist plausibel:
vektorartiger Differenzialoperator Nabla

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \forall i = 1,2,3$$

$$\boxed{\nabla'_i = \alpha_{ij} \nabla_j}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} = \vec{e_i} \nabla_i}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nabla_j u_i$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\bar{J}^+ \bar{J} - \bar{1})$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(J_{ik} J_{lj} - \delta_{lj})$$

$$\bar{\varepsilon}' = \frac{1}{2}\left(((\bar{J}^+)'(\bar{J})' - \bar{1})\right) = \frac{1}{2}(\bar{\alpha}\bar{J}^+ \bar{\alpha}^+ \bar{\alpha}\bar{J}\bar{\alpha} - \bar{1}) = \frac{1}{2}\bar{\alpha}(\bar{J}^+ \bar{J} - \bar{1})\bar{\alpha}^+ \bar{1} = \bar{\alpha}(\bar{\varepsilon})\bar{\alpha}^+$$

Spannungstensor: nach §3 [...] gilt

$$\delta\vec{F} = n_i \vec{\sigma_i} df$$

$$df_i = n_i df \quad \forall i = 1,2,3$$

$$\delta F_j = \sigma_{ij} df_i = df_i \sigma'_{ij}$$

tensorielle lineare Verknüpfung (σ_{ij} Tensor 2. Stufe):

$$d\vec{f} \rightarrow \delta\vec{F}$$

Arbeits- und Energieausdruck

$$\delta a = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

ergibt einen Skalar (verändert die Größe bei orthogonaler Transformation nicht)

$$\delta a = \sigma'_{ij} d\varepsilon'_{ij}$$

Hooksches Gesetz:

$$u = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$$

§ 6 Materialgleichungen

a) Allgemeine Überlegungen

Ziel: Verallgemeinerung des Hookschen Gesetzes

Elastische Energiedichte des verformten Mediums

1.) Weitere thermodynamische Variable: Entropie

thermodynamisches Potenzial: innere Energie $u(s, \bar{\varepsilon})$

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_s$$

2.) Weitere thermodynamische Variable: Temperatur

thermodynamisches Potenzial: freie Energie $f(T, \bar{\varepsilon})$

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_T$$

Experimentelle Bestimmung von $f(T, \varepsilon)$: Der Körper wird in einem Wärmebad mit konstanter Temperatur verzerrt; der Integrationsweg c ist also eine Isotherme.

$$f(T, \bar{\varepsilon}) - \underbrace{f(T, 0)}_{:=0} = \int_c \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \int_0^1 \sigma_{ij}(\lambda) \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \lambda} d\lambda$$

$$f(T, \bar{\varepsilon}) : \mathbb{R}^6 \ni \varepsilon_{ij} \mapsto \mathbb{R}^1$$

Diese Abbildung ist stetig und mehrmals stetig differenzierbar. Darum: Taylorentwicklung an der Stelle $\varepsilon = 0$

$$f(T, \bar{\varepsilon}) = C_{ij}(T)\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} C_{ijkl}(T)\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + \frac{1}{3} C_{ijklmn}(T)\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn} + O(\bar{\varepsilon}^4)$$

Da $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, ist auch $C_{ji} = C_{ij}$; ebenso $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}$.

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ij}(T)$$

Aus der Existenz des thermodynamischen Potenzials: $C_{ijkl} = C_{klij}$ sowie $C_{ijklmn} = C_{klmnij} = C_{mnijkl}$ usw.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}}$$

$$\boxed{\sigma_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} = \underbrace{C_{ij}(T)}_{=0 \text{ bei } \varepsilon=0} + C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} C_{ijklmn}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn} + O(\varepsilon^3)}$$

$\varepsilon \to 0$, $\sigma_{ij} \to 0$, $C_{ij} = 0$

Bei schwacher Deformation kann man sich auf lineare Glieder beschränken, d.h. das verallgemeinerte Hooksche Gesetz lautet:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(T)\varepsilon_{kl}$$

$C_{ijkl}(T)$: Materialkonstanten

Voigtsche Notation: Zusammenfassung der Indizes
$(11) \to 1$
$(22) \to 2$
$(33) \to 3$
$(23) = (32) \to 4$
$(13) = (31) \to 5$
$(12) = (21) \to 6$

$$\sigma_I = \sum_{II=1}^{6} C_{I,II}\varepsilon_{II} \quad \forall I = 1\dots 6$$

$C_{I,II}$ ist eine 6×6-Matrix; es folgt aus der Existenz des thermodynamischen Potenzials:

$$\frac{\partial \sigma_I}{\partial \varepsilon_{II}} = \frac{\partial \sigma_{II}}{\partial \varepsilon_I}$$

$$C_{I,II} = C_{II,I}$$

$C_{I,II}$ besitzt $6 + 15$ verschiedene Elemente (6 auf der Hauptdiagonalen, 30 symmetrische sonstige Elemente).

b) Vereinfachung der Materialgleichung in isotropen, elastischen Medien

Die meisten Medien sind isotrop. Ausnahmen:

- Bei der Herstellung wird eine Vorzugsrichtung erzeugt, z.B. durch ziehen, walzen, abschrecken, oder auch durch plattentektonische Vorgänge.
- Einkristalle

Unendlich ausgedehnte isotrope Medien besitzen keine ausgezeichnete Raumrichtung, d.h. jede orthogonale Transformation aus der dreidimensionalen Drehgruppe führt das Medium in sich selbst über.
Beim Übergang $\Gamma \to \Gamma'$ gilt:

$$C'_{ijkl} = \alpha_{im}\alpha_{jn}\alpha_{kr}\alpha_{ls}C_{mnrs}$$

Das ist eine homogene Gleichung für C_{ijkl}; nichttriviale Lösung durch Singulärwertzerlegung.
Lösung: Invariante von $\bar{\varepsilon}$, $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$

$$f(T, \bar{\varepsilon}) = f(T, \varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}) \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

Taylorentwicklung:

$$f(T, \bar{\varepsilon}) = A_1(T)\varepsilon_I^2 + A_2(T)\varepsilon_{II} + A_3(T)\varepsilon_I^3 + A_4(T)\varepsilon_I\varepsilon_{II} + A_5(T)\varepsilon_{III} + O(\varepsilon^4)$$

Lineare Näherung:

$$f(T, \bar{\varepsilon}) = A_1(T)\varepsilon_I^2 + A_2(T)\varepsilon_{II}$$

Mit $\varepsilon_I = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$:

$$\frac{\partial \varepsilon_I}{\partial \varepsilon_{ij}} = \delta_{ij}$$

$$\varepsilon_{II} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{33} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{II}}{\varepsilon_{11}} = \varepsilon_{33} + \varepsilon_{22} = \varepsilon_I - \varepsilon_{11}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{II}}{\varepsilon_{12}} = -\varepsilon_{21}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{II}}{\varepsilon_{ij}} = \delta_{ij}\varepsilon_I - \varepsilon_{ij}$$

$$f(T) = A_1(T)\varepsilon_I^2 + A_2(T)\varepsilon_{II} + A_3(T)\varepsilon_I^3 + A_4(T)\varepsilon_I\varepsilon_{II} + A_5(T)\varepsilon_{III}$$

$$\varepsilon_I = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

$$\varepsilon_{II} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{33} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon_{III} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}$$

Da $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$ invariant sind, ist $f(T)$ invariant gegen beliebige orthogonale Transformationen der 3-dimensionalen Drehgruppe O_3

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}$$

$$C_{1111} = C_{2222} = C_{3333} = 2A_1 \quad \text{Voigt: } C_{11}$$

$$C_{1122} = C_{2233} = C_{3311} = 2A_1 + A_2 \quad \text{Voigt: } C_{12}$$

$$C_{1212} = C_{2323} = C_{3131} = -A_2 \quad \text{Voigt: } C_{44}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_I}{\partial \varepsilon_{ij}} = \delta_{ij}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{II}}{\partial \varepsilon_{22}} = \varepsilon_{33} + \varepsilon_{11} = \varepsilon_I - \varepsilon_{22}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{II}}{\partial \varepsilon_{12}} = -\varepsilon_{21}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{II}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \varepsilon_I \delta_{ij} - \varepsilon_{ji}$$

$$\frac{-\partial \varepsilon_{III}}{\partial \varepsilon_{11}} = \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{23}\varepsilon_{32} \quad \text{und zyklisch vertauscht}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{III}}{\partial \varepsilon_{12}} = \varepsilon_{23}\varepsilon_{31} - \varepsilon_{21}\varepsilon_{33} \quad \text{und zyklisch vertauscht}$$

Spannungen:

$$\sigma_{ij} = (\partial f)/(\partial \varepsilon_{ij})$$

$$\sigma_{11} = 2A_1\varepsilon_I + A_2(\varepsilon_I - \varepsilon_{11}) + 3A_3\varepsilon_I^2 + A_4\varepsilon_I(\varepsilon_{II} - \varepsilon_{11}) + A_5(\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{23}\varepsilon_{32}) \quad + 2 \text{ zyklisch vertauschte Glieder}$$

$$\sigma_{12} = -A_2\varepsilon_{21} - 4A_1\varepsilon_{21} + A_5(\varepsilon_{23}\varepsilon_{31} - \varepsilon_{21}\varepsilon_{33}) \quad + \text{zyklische Vertauschungen}$$

Lineare Näherung:

$$\sigma_{11} = 2A_1\varepsilon_I + A_2(\varepsilon_I - \varepsilon_{11}) = (2A_1 + A_2)\varepsilon_I - A_2\varepsilon_{11}$$

$$\sigma_{12} = -A_2\sigma_{21}$$

Hooksches Gesetz:

$$\boxed{\sigma_{ij} = (2A_1 + A_2)\varepsilon_I \delta_{ij} - A_2 \varepsilon_{ji}}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\varepsilon_I \delta_{ij} + \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_{ji}$$

E: Elastizitätsmodul
μ: Poissonzahl

$$G := \frac{E}{2(1+\mu)} \quad \text{Schubmodul}$$

$$A_1 = \frac{(1-\mu)E}{2(1-\mu)(1+\mu)}$$

$$A_2 = -\frac{E}{1+\mu}$$

Lineare Konstanten:

	$E[10^{11}\text{Pa}]$	μ	$A_1[10^{11}\text{Pa}]$	$A_2[10^{11}\text{Pa}]$
Cu	$1,259$	0,346	0,768	-0,936
Fe	$2,091$	$0,299$	$1,403$	$-1,62$
Kalkstein	$0,4$–$0,9$	$0,28$		
Marmor	$0,6$–$0,9$	$0,25$		

Nichtlineare Konstanten:

	A_3[Pa	A_4[Pa]	A_5[Pa]
Cu	$-4,60 \cdot 10^{11}$	$1,22 \cdot 10^{12}$	$-1,56 \cdot 10^{12}$
Fe	$-5,63 \cdot 10^{11}$	$1,52 \cdot 10^{12}$	$-1,49 \cdot 10^{12}$

Anwendung: Größen als Konstanten der linearen Näherung

Umkehrung der Spannungs-Dehnungsrelation: 1. Schritt:

$$\sigma_I = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = (6A_1 + 3A_2)\varepsilon_I - A_2\varepsilon_I$$

$$\varepsilon_I = \frac{1}{6A_1 + 2A_2}\sigma_I$$

$$\sigma_I = \frac{3\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\varepsilon_I + \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_I$$

$$\boxed{\varepsilon_I = \frac{1-2\mu}{E}\sigma_I}$$

$$\varepsilon_{ji} = \frac{1+\mu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon_I\delta_{ij} = \frac{1+\mu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\mu}{E}\sigma_I\delta_{ij}$$

Legendre-Transformation:

$$df = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}d\sigma_{ij} - \varepsilon_{ij}d\sigma_{ij}$$

$$g(T,\bar{\sigma}) = f(T,\bar{\varepsilon}) - \sigma_{ij} - \varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$

c) Kubisches Medium in der linearen Näherung

kubische Punktgruppe (48 Symmetrieelemente)
orthogonale Transformation:

$$C_{ijkl} = \alpha_{im}\alpha_{jn}\alpha_{kr}\alpha_{ls}$$

Die Lösung des homogenen Gleichungssystems ist kompliziert („Singulärwertzerlegung“)

Raten des Energieausdrucks $f(T, \bar{\varepsilon})$:

1. Lineare Näherung: quadratische Glieder in ε_{ij}
2. Für das Folgende reichen zwei Typen von Symmetrieoperationen aus:
   Spiegelung:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C_{ijkl} = (-1)C_{ijkl}$$

   (-1) tritt auf, wenn aus $\{i, j, k, l\}$ ein Index oder 3 Indizes gleich 1 sind.
   $\varepsilon_{11}^2, \varepsilon_{22}^2, \varepsilon_{33}^2$ $\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}, \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}, \varepsilon_{33}\varepsilon_{11}$
   $\varepsilon_{12}\varepsilon_{21}, \varepsilon_{23}\varepsilon_{32}, \varepsilon_{31}\varepsilon_{13}$
   Drehung um die $[III]$-Achse um $2\pi/3$:
   $x_1 \to x_2$
   $x_2 \to x_3$
   $x_3 \to x_1$

$$f(T, \bar{\varepsilon}) = \frac{1}{2}C_{11}(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) + C_{12}(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11}) + 2C_{44}(\varepsilon_{12}\varepsilon_{21} + \varepsilon_{23}\varepsilon_{32} + \varepsilon_{31} - \varepsilon_{13})$$

$$\sigma_{11} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{11}} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$$

$$\sigma_{12} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{12}} = 2C_{44}\varepsilon_{21}$$

§ 7 Einfaches Beispiel für die Verformung

elastischer Körper in der Näherung der linearen Elastizitätstheorie

a) Einachsige Deformation eines Quaders

Quader: $\{-L_1/2 \le x_1 \le L_1/2, -L_2/2 \le x_2 \le L_2/2, -L_3/2 \le x_3 \le L_3/2\}$

Geometrische Bedingungen:
bei Fläche $\{-L_1/2 \le x_1 \le L_1/2, -L_2/2 \le x_2 \le L_2/2, -L_3/2\}$ wird der Quader fest verankert
bei Fläche $\{-L_1/2 \le x_1 \le L_1/2, -L_2/2 \le x_2 \le L_2/2, L_3/2\}$ wirkt die Kraft $(0,0,F)$ ($F > 0$: Zugkraft, $F < 0$: Druckkraft); keine Volumenkräfte;

Arbeitshypothese:

- Der verformte Körper ist auch ein Quader mit anderen Kantenlängen.
- $\sigma_{ij} = 0, i \neq j$
  Auf die Flächen mit den Normalen $[100], [010]$ wirken keine Spannungen. $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$ gilt überall auf der Oberfläche
- σ_{33} gilt auch für $-L_3/2 \le z \le L_3/2$

Gleichgewichtsbedingung der Elastizitätstheorie:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + 0 = 0 \quad \forall j = 1,2,3$$

ist erfüllt!

$$\varepsilon_I = \sigma_{33}$$

$$\sigma_{33} = \frac{F}{L_1 L_2}$$

$$\varepsilon_I = \frac{1-2\mu}{E}\sigma_I = \frac{1-2\mu}{E}\sigma_{33}$$

Querkontraktion:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\mu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\mu}{E}\sigma_I\delta_{ij}$$

$$\varepsilon_{11} = -\frac{\mu}{E}\sigma_{33}$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\mu}{E}\sigma_{33}$$

$$\boxed{\varepsilon_{33} = -\frac{\mu}{E}\sigma_{33} = \frac{1}{E}\sigma_{33}}$$

Beachte: $\sigma_{33}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ sind unabhängig von x_3.

Verschiebungsfeld, lineare Näherung:

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_{11} = -\frac{\mu}{E}\sigma_{33}$$

$$u_1 = -\frac{\mu}{E}\sigma_{33}x_1 + C$$

$$u_2 = -\frac{\mu}{E}\sigma_{33}x_2 + C$$

$$u_3 = -\frac{1}{E}\sigma_{33}x_3 + C$$

$u_3 = 0 \Rightarrow z = -L_3/2$

$$u_3 = -\frac{1}{E}\sigma_{33}\left(x_3 + \frac{L_3}{2}\right)$$

Volumen des verformten Quaders:

$$\tilde{V} = L_1\left(1 - \frac{\mu}{E}\sigma_{33}\right)L_2\left(1 - \frac{\mu}{E}\sigma_{33}\right)L_3\left(1 + \frac{1}{E}\sigma_{33}\right)$$

lineare Elastizitätstheorie: die Terme σ_{33}/E sind klein gegen 1, d.h. man kann für das Volumenverhältnis schreiben:

$$\frac{\tilde{V}}{V_0} = \frac{\tilde{V}}{L_1L_2L_3} = 1 + \frac{1-2\mu}{E}\sigma_{33}$$

$$\frac{\tilde{V} - V_0}{V_0} = \frac{1-2\mu}{E}\sigma_{33}$$

mit $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ bestätigt die Arbeitshypothese

Elastische Arbeit:

$$da = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} = \sigma_{33}d\varepsilon_{33} = E\varepsilon_{33}d\varepsilon_{33}$$

kein Arbeitsbeitrag von den Mantelflächen

$$h(T, \bar{\varepsilon}) - h(T, 0) = \int_c da = \frac{E}{2}\varepsilon_{33}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_{33}\sigma_{33}$$

Hooksches Gesetz!

b) Allseitiger Druck eines Quaders

Quader $\{-L_1/2 < x_1 \leq L_1/2, -L_2/2 < x_2 \leq L_2/2, -L_3/2 < x_3 \leq L_3/2\}$
Randbedingung: Auf jede Oberfläche wirkt der Druck p
Oberflächen:
$\vec{h} = (\pm1, 0, 0) \quad \sigma_{11}(\pm L/2) = -p$ $\vec{h} = (0, \pm1, 0) \quad \sigma_{22}(\pm L/2) = -p$ $\vec{h} = (0, 0, \pm1) \quad \sigma_{33}(\pm L/2) = -p$

Plausibilitätsbetrachtung:

- Hauptachsen des Spannungstensors $\bar{\sigma}$ stimmen mit dem Bezugssystem überein. Keine Schubspannungen σ_{ij} für $i \neq j$.
- In jeder Ebene $x_1 = const$ (und analog bei x_2 und x_3) hat $\sigma_{11}(x_1, x_2, x_3)$ den selben Wert:
  $\sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) = -p$
  $\sigma_{22}(x_1, x_2, x_3) = -p$
  $\sigma_{33}(x_1, x_2, x_3) = -p$
  Damit gibt es keine Volumenkräfte:
  $$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0$$

$$\sigma_I = -3p$$

Bei isotropem Medium:

$$\varepsilon_I = \left(\frac{1-2\mu}{E}\right)\sigma_I = -\frac{3(1-2\mu)}{E}p$$

Plausibilität:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{1}{3}\varepsilon_I$$

$$\varepsilon_{ii} = -\frac{1-2\mu}{E}p$$

Lineare Näherung $\varepsilon_{ii} = (\partial u_i)/(\partial x_i)$:

$$u_i = -\frac{1-2\mu}{E}px_i + C \quad \forall i = 1,2,3$$

Volumen des deformierten Quaders:

$$\tilde{V} = L_1\left(1-\frac{1-2\mu}{E}p\right)L_2\left(1-\frac{1-2\mu}{E}p\right)L_3\left(1-\frac{1-2\mu}{E}p\right)$$

$$\frac{\tilde{V}}{V_0} = 1 - 3\frac{1-2\mu}{E}p$$

$$\frac{\tilde{V}-V_0}{V_0} = -3\frac{1-2\mu}{E}p$$

Kompressibilität:

$$\kappa = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p} = 3\frac{1-2\mu}{E}$$

Kompressionsmodul (isotherm):

$$K_T = \frac{1}{\kappa} = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

c) Ein Quader im Schwerefeld der Erde

Quader $G = \{-L_1/2 \le x_1 \le L_1/2, -L_2/2 \le x_2 \le L_2/2, 0 \le x_3 \le L_3\}$

Randbedingungen:

- Der Quader ist an der Oberfläche $x_3 = 0$ eingespannt.
- Alle anderen Oberflächen sind kräftefrei.

Plausibilitätsbetrachtung:

- Das Koordinatensystem ist parallel zu den Quaderachsen. Für die Hauptspannungsrichtungen gilt $\sigma_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$
- In jeder Ebene $x_3 = const$ sind die Hauptspannungen $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ von x_1 und x_2 unabhängig: $\sigma_{11} = \sigma_{11}(x_3), \sigma_{22} = \sigma_{22}(x_3), \sigma_{33} = \sigma_{33}(x_3)$

Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \varrho g_j = 0$$

$$\vec{g} = (0, 0, g)$$

(die z-Achse ist nach unten definiert, darum ist der Wert der Erdbeschleunigung positiv)

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \varrho g = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{33} = -\varrho g x_3 + C$$

$x_3 = L_3$ ist spannungsfrei $\sigma_{33} = \varrho g(L_3 - x_3)$
Fläche $x_1 = \pm L_1/2$ ist spannungsfrei $\Rightarrow \sigma_{11} = 0$ überall
Fläche $x_2 = \pm L_2/2$ ist spannungsfrei $\Rightarrow \sigma_{22} = 0$ überall

Hooksches Gesetz (siehe a[...]):
$\varepsilon_{11} = -\mu/E\sigma_{33}$
$\varepsilon_{22} = -\mu/E\sigma_{33}$
$\varepsilon_{33} = 1/E\sigma_{33}$

Verschiebungsfeld:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_{11} = -\frac{\mu}{E}\varrho g(L_3 - x_3)$$

$$u_1 = -\frac{\mu}{E}\varrho g x_1(L_3 - x_3)$$

$$u_2 = -\frac{\mu}{E}\varrho g x_2(L_3 - x_3)$$

$$u_3 = \frac{1}{E}\varrho g\left(x_3 L_3 - \frac{1}{2}x_3\right)$$

für $x_3 = 0$ ist $u_3 = 0$; maximale Elongation:

$$u_3(L_3) = \frac{1}{2E}\varrho g L_3^2$$

$$\Delta V = \int \varepsilon_I(\vec{r})dV$$

$$\varepsilon_I = \left(\frac{1 - 2\mu}{E}\right)\varrho g(L_3 - x_3)$$

§ 8 Die Bewegungsgleichungen der Elastomechanik im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie

a) Eindeutigkeit der Lösungen in der Elastomechanik

Kompatibilitätsbedingungen (Verträglichkeitsbedingungen), Prinzip von Saint-Venant:
Auf der Oberfläche ∂G des elastischen Mediums sei die Kraft vorgegeben:

$$\delta F_j = \vec{n_i}\sigma_{ij}(\vec{r})df \quad \forall \vec{r} \in \partial G$$

(n_i: Einheitsvektor der Oberflächennormalen)
Also ist $\sigma_{ij}(\vec{r}) \quad \forall \vec{r} \in \partial G$ bekannt.
Problem: Wie pflanzt sich $\bar{\sigma}$ in das Innere von G fort? Wie groß ist die Deformation $\bar{\varepsilon}$?

Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(\vec{r})}{\partial x_i} + \varrho \vec{g_j} = 0 \quad \forall j = 1,2,3$$

Problem zunächst unbestimmt! Lösung des Dilemmas: Betrachte Verschiebungsfeld $\vec{u}$ in der linearen Näherung.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad \forall i,j \in \{1,2,3\}$$

Frage: Welche Forderungen müssen die 6 Ortsfunktionen $\varepsilon_{ij}(\vec{r})$ erfüllen, damit

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

gilt, d.h. dass die Ortsfunktionen u_1, u_2, u_3 allein bestimmend sind? Antwort: Kompatibilitätsbedingungen!

Annahme: Das Verschiebungsfeld $u_i(\vec{r}), i = 1,2,3$ sei mindestens dreimal stetig differenzierbar.

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j}$$

1. Satz von Gleichungen:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_2^2 \partial x_1} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}\right)$$

2. Satz von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \boxed{\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_1}} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_2} + \boxed{\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial x_1}}\right] \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\varepsilon_{13} + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}\varepsilon_{12} - \frac{1}{2}\boxed{\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_3}} - \frac{1}{2}\boxed{\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_3}}
\end{aligned}$$

b) Bewegungsgleichungen der Elastomechanik

zentrales Verschiebungsfeld $\vec{u}(\vec{r}, t)$
Verzerrungstensor:

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i(\vec{r}, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\vec{r}, t)}{\partial x_i}\right) \quad \forall i,j \in \{1,2,3\}$$

$$\varepsilon_I(\vec{r},t) = \frac{\partial u_i(\vec{r},t)}{\partial x_i} = \mathrm{div}\vec{u}(\vec{r},t)$$

Materialgleichung (lineare Elastizitätstheorie, Isotropie), Notation der Technik (T weitere Variable):

$$\sigma_{ij}(\vec{r},t) = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\varepsilon_I(\vec{r},t)\delta_{ij} + \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_{ij}(\vec{r},t) \quad \forall i,j \in \{1,2,3\}$$

$E = E(T), \mu = \mu(T)$

Das Hooksche Gesetz ist lokal und instantan erfüllt:

$$\sigma_{ij}(\vec{r},t) = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\mathrm{div}\vec{u}\delta_{ij} + \frac{E}{1+\mu}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i(\vec{r},t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\vec{r},t)}{\partial x_i}\right)$$

Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \varrho g_j = 0$$

$$\vec{g} = \begin{cases} \vec{g} \\ -\varrho\ddot{\vec{u}} \end{cases}$$

$$\frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{div}\vec{u} + \frac{E}{1+\mu}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2}\right) + \varrho g_j = 0$$

$$\boxed{\frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)}\frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{div}\vec{u} + \frac{E}{2(1+\mu)}\Delta u_j + \varrho g_j = 0} \quad \forall j = 1,2,3$$

(Δ: Laplace-Operator)

$$\frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)}\mathrm{graddiv}\vec{u} + \frac{E}{2(1+\mu)}\Delta u_j + \varrho\vec{g} = 0$$

Nur richtig für ein rechtwinkliges Koordinatensystem!